PROXIMIDADES AL ACCIONAR EPISTÉMICO-COGNITIVO DEL MATEMÁTICO. *Preludio que brota de los testimonios de matemáticos novatos y expertos. Estudio Exploratorio* 1

Juan Carlos Sánchez* - Carmen Valdivé**

*Doctor en Educación, Magister en Matemática, mención Enseñanza de la Matemática. Profesor de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador-Instituto Pedagógico, Barquisimeto, Departamento de Matemática. Barquisimeto, Venezuela.

Email: **juan.sanchez@ipb.upel.edu.ve**, https://orcid.org/0000-0001-7971-1216

**Doctor en Educación, Magister en Matemática, mención Enseñanza de la Matemática. Doctora en Educación en el área de Educación Matemática. Profesora de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado. Barquisimeto, Venezuela.

Email: **carmenv@ucla.edu.ve**, https://orcid.org/0000-0001-7291-2488

RESUMEN

En este artículo presentamos algunos resultados, reflexiones y aportaciones de un trabajo de investigación (Sánchez, 2018) cuyo problema central está dirigido a estudiar las acciones epistémicas y cognitivas que activan los matemáticos novatos y expertos al momento de desarrollar el conocimiento matemático y ofrecer al didacta nuevas pistas de cómo es posible aprender a pensar y generar matemáticamente. Nos planteamos dos grandes intenciones: (1) estudiar cómo, cognitivamente, el matemático experto o novato reconociendo un problema y ciertas posibilidades, estructura nuevas conjeturas, para llegar a la prueba formal y así generar aportes a la matemática, y (2) proponer una aproximación teórica-conceptual del oficio del docente y estudiante de matemática a la luz de las aportaciones que registra el accionar epistémico y cognitivo del matemático profesional. En este manuscrito sólo mostramos parte del primer propósito. Conceptualmente, la investigación se centra en el dominio cognitivo del llamado Pensamiento Matemático Avanzado (PMA). Metodológicamente nos adherimos a la perspectiva de investigación cualitativa. El análisis de estos registros se centró en un proceso de descripción, categorización e interpretación, con el apoyo de redes sistémicas, donde emergieron categorías y/o atributos que nos llevaron a caracterizar las acciones de matemáticos novatos y expertos al resolver problemas matemáticos.

Palabras Clave: Pensamiento Matemático Avanzado, acciones epistémica y cognitivas, novato y experto.

JEL: I2

Recibido: 21/03/2018 **Aprobado:** 18/06/2018

[1] Trabajo parcial producto de una tesis del Doctorado UCLA-UNEXPO-UPEL.

PROXIMITIES WHEN ACTUATING EPISTEMIC-COGNITIVE MATHEMATICS. Prelude that springs from testimonies of novice and expert mathematicians. An exploratory study. [1]

Juan Carlos Sánchez* - Carmen Valdivé**

*Doctor of Education, Master in Mathematics, mention Mathematics Teaching. Professor at Universidad Pedagógica Experimental Libertador-Instituto Pedagógico Barquisimeto, Department of Mathematics. Barquisimeto, Venezuela.
Email: **juan.sanchez@ipb.upel.edu.ve**, https://orcid.org/0000-0001-7971-1216
** Doctor of Education, Master in Mathematics, mention Mathematics Teaching. PhD in Education in the area of Mathematics Education. Professor at Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado. Barquisimeto, Venezuela. Email: **carmenv@ucla.edu.ve**, https://orcid.org/0000-0001-7291-2488

ABSTRACT

In this article we present some results, reflections and contributions of a research work (Sánchez, 2018) whose central problem is directed to study the epistemic and cognitive actions that activate the novice and expert mathematicians when developing mathematical knowledge and offer the didactic new clues on how it is possible to learn to think and generate mathematically. We set ourselves two great intentions: (1) to study how, cognitively, the expert or novice mathematician recognizes a problem and certain possibilities, structures new conjectures, to lead to a formal proof and thus generate contributions to mathematics, and (2) propose a theoretical and conceptual approach to the job of the teacher and student of mathematics in light of the contributions recorded by the epistemic and cognitive actions of the professional mathematician. In this manuscript we only show part of the first purpose. Conceptually, the research focuses on the cognitive domain of the so-called Advanced Mathematical Thought. Methodologically we adhere to the perspective of qualitative research. The analysis of these records focused on a process of description, categorization and interpretation, with the support of systemic networks, where categories and/or attributes emerged led us to characterize the actions of novice and expert mathematicians in solving mathematical problems.

Key word: Advanced Mathematical Thought, epistemic and cognitive actions, novice and expert.

JEL: I2

R
E
S
E
A
R
C
H

[1] Partial work product of a PhD thesis UCLA-UNEXPO-UPEL

PROXIMIDADES AO ATUAR EPISTÉMICO-COGNITIVO DO MATEMATICO. *Prelúdio que brota dos testemunhos de matemáticos novatos e peritos. Estudo Exploratório*[1]

Juan Carlos Sánchez* - Carmen Valdivé**

* Doutor em Educação, Mestre em Matemática, menção Ensino da Matemática. Professor da Universidad Pedagógica Experimental Libertador-Instituto Pedagógico Barquisimeto, Departamento de Matemática. Barquisimeto, Venezuela.
Email: **juan.sanchez@ipb.upel.edu.ve**, https://orcid.org/0000-0001-7971-1216
** Doutor em Educação, Mestre em Matemática, menção Ensino da Matemática. Doutora em Educação na área de Educação Matemática. Professora da Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado. Barquisimeto, Venezuela. Email: **carmenv@ucla.edu.ve**, https://orcid.org/0000-0001-7291-2488

RESUMO

Neste artigo apresentamos alguns resultados, reflexões e contribuições de um trabalho de pesquisa (Sánchez, 2018) cujo problema central é direcionado para o estudo das ações epistêmicas e cognitivas que ativam os matemáticos novatos e especialistas no desenvolvimento do conhecimento matemático e oferecer as novas pistas didáticas sobre como é possível aprender a pensar e gerar matematicamente. Nós consideramos duas grandes intenções: (1) estudar como, cognitivamente, o matemático especialista ou novato reconhece um problema e certas possibilidades, estrutura novas conjecturas, para chegar à prova formal e, assim, gerar contribuições à matemática e (2) propor uma abordagem teórico-conceitual para o trabalho do professor e aluno de matemática à luz das contribuições registradas pelas ações epistêmicas e cognitivas do matemático profissional. Neste manuscrito, mostramos apenas uma parte do primeiro propósito. Conceitualmente, a pesquisa está focada no domínio cognitivo do chamado Pensamento Matemático Avançado (PMA). Metodologicamente aderimos à perspectiva da pesquisa qualitativa. A análise destes registros esteve voltada para um processo de descrição, categorização e interpretação, com o apoio de redes sistêmicas, onde emergiram categorias e / ou atributos que nos levaram a caracterizar as ações de matemáticos novatos e especialistas na resolução de problemas matemáticos.

Palavras chave: Pensamento Matemático Avançado, ações epistêmicas e cognitivas, novato e perito.

JEL: I2

P
E
S
Q
U
I
S
A

[1] Produto de trabalho parcial de uma tese de doutorado UCLA-UNEXPO-UPEL

Problemática de estudio

Uno de los tantos cuestionamientos e intencionalidades que ostenta la educación matemática contemporánea refiere a su interés de generar nuevos insumos que le permitan interpretar ¿cómo hacer que el estudiante desarrolle el conocimiento matemático? (Sánchez, 2016, 2018). Muchos han sido los interesados en dar respuestas y explicitar dicha producción gnoseológica-matemática desde el estudio de los procesos que activan los matemáticos profesionales cuando hacen matemática (Schoenfeld, 1992; Sierpinska y Lerman, 1996; Weber y Alcock, 2004; Alcock y Weber, 2005; Inglis, Mejías- Ramos y Simpson, 2014; Weber y Mejia-Ramos, 2011; Tall, 2013); resaltando los beneficios que pueden presentarse si se consideran tales procesos en la enseñanza de esta ciencia (Balachef, 1982, 1987; Sierpinska y Lerman, 1996; Harel y Sowder, 1998; Weber, Inglis y Mejia-Ramos, 2014; Larios, 2015). Reportes de investigación asilados en un contexto teórico que reclaman evidencias empíricas para su legitimación.

Tal situación nos hizo querer involucrarnos en un estudio que nos lleva a observar e interpretar ¿cuáles son los procesos epistémicos y cognitivos que emplean los matemáticos a la hora de generar nuevos insumos en el conocimiento matemático?, y así, desde un procedimiento experiencial investigativo, desvestirla de su posible accidentalidad teórica y apropiarnos de su esencia para aportar desde un punto de vista didáctico-epistémico a la enseñanza de la matemática.

Desvelar las acciones epistémicas y cognitivas empleadas por los matemáticos de oficio para aportar a la didáctica, nos hace revisar acidiosamente presupuestos teoréticos salpicados de la pluridimesionalidad del conocimiento matemático que muestran -particularmente- su rostro cognitivista (Dreyfus y Eisenberg, 1996; Gray y Tall, 2001; Dreyfus, 2002; Tall, 2013) y epistémico (Hadamard, 1945; Dieudonné, 1989; De Lorenzo 1971, 1980, 1998; y Weber, Inglis y Mejia-Ramos, 2014) en el cual localizamos insumos que describen algunos rasgos y/o atributos que luce el oficio del matemático, sumido en un proceder investigativo a través de fases (Hadamard, 1945; Dieudonné, 1989; Tall, 2013) que lo llevan a dilatar el conocimiento matemático.

Particularmente asumiendo como plataforma conceptual el ciclo que según Tall (2013) comporta el desarrollo del conocimiento matemático, diseñado a través de cuatro fases formulado en términos de problema, posibilidades, conjeturas y pruebas, intentamos transparentar aquellas acciones epistémicas y cognitivas de las cuales se sirve el matemático profesional para desplazarse -desde un proceso recursivo- en cada una de las fases descritas. Posicionamiento que invita a preguntarnos ¿cómo se pueden describir los procesos epistémicos y cognitivos que emplean los matemáticos a la hora del reconocimiento de un problema?, ¿al estudiar y empoderarse de herramientas introductorias para enfrentar el problema?, y ¿al generar y validar sus conjeturas solucionadoras de la situación problemática?

En este artículo queremos desarrollar ideas, hallazgos y reflexiones, que nos permiten dar respuestas parciales a las interrogantes antes expuestas, desde un acercamiento exploratorio; mismo que fue parte de una investigación en Educación Matemática cuyo propósito fue estudiar cómo, cognitivamente, el matemático experto o novato reconociendo un problema y ciertas posibilidades, estructura nuevas conjeturas, para llegar a la prueba formal y así generar aportes a la matemática; hallazgos que luego nos trasladaron a teorizar sobre la praxis del docente y estudiante de matemática en el contexto educativo.

Este manuscrito se desarrolla de la siguiente manera: Primeramente la fundamentación teórica, la cual permite: (1) ubicar el objeto de estudio de investigación dentro de una aproximación teórica cognitiva Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) y (2) caracterizar a los versionantes en matemáticos novatos y expertos. Sumariamente se registra la ruta metodológica que explicita las tareas de categorización y caracterización de las acciones epistémicas y cognitivas reveladas por los matemáticos -versionantes del estudio- al momento de desarrollar y solidificar el conocimiento matemático. Por último reseñamos hallazgos y reflexiones finales de la investigación.

Fundamentación teórica

Dedicamos este espacio a la presentación de una breve mirada a las consideraciones teóricas que fundamentan nuestro objeto de estudio, a los fines de transparentar aquellas aportaciones y percepciones ofrecidas por teóricos e investigadores que dejan en evidencia significados formales y sustantivos que nos permitieron alcanzar las metas de la investigación.

PMA: *Asentamiento Conceptual del Estudio*

Nuestra investigación se enmarcó conceptualmente en el llamado Pensamiento Matemático Avanzado (PMA); aproximación teoría promovida y desarrollada inicialmente por David Tall y Tommy Dreyfus, avocada al estudio y relación del desarrollo y crecimiento del pensamiento matemático -desde una etapa elemental hacia una avanzada con rasgos próximos al del matemático profesional-. Cuerpo teórico (PMA) que se alimentó de aportaciones que yacen en la psicología cognitiva, principalmente las elaboradas por Piaget y Bruner (Valdivé, 2008; Valdivé y Garbin, 2008, 2010, 2013).

Mirada cognitivista centrada en el estudio ciertos fenómenos metales correspondiente al pensamiento matemático, cuyo origen se ubican en los dos últimos lustros del siglo pasado debido al interés en la comunidad de matemáticos y educadores matemáticos, en la forma de cómo piensan las personas que se dedican profesionalmente a las matemáticas, es decir un interés por estudiar la psicología del pensamiento matemático.

El Desarrollo del Conocimiento y el Pensamiento Matemático en el PMA: *aportaciones que se alojan en los Mundos de la Matemática.*

Las líneas que siguen destacan la descripción e interpretación de cómo Tall idealizó el desarrollo cognitivo del conocimiento matemático en el individuo, recurriendo para ello, de un discurso metafórico, que nos lleva por un viaje, una aventura hacia lo que él denominó los ***tres mundos de*** la matemática, donde es posible retroceder y activar procesos de regulación (idea piagetiana) y de autocomprensión, pero más aún, en este viaje es posible transformar los objetos matemáticos en perfectas entidades mentales, que promueven, desde el lenguaje y el simbolismo, la generación de sofisticados conocimientos matemáticos.

Los mundos a los que Tall hace referencia son: ***El Embodied, El proceptual y el Formal***. El ***primer mundo*** nace de nuestra capacidad sensorial de reconocer, al ver patrones, similitudes y diferencias que expresamos en lenguaje para categorizar objetos, esto es, refiere a los pensamiento de las cosas que percibimos desde los sentidos, no sólo en el mundo físico, sino también atiende a nuestras concepciones internas que implican las imaginerías -visuo-espacial- de nuestro propio mundo mental (Tall, 2004a, 2004b, 2013).

El ***segundo mundo*** se basa en nuestra capacidad motriz para la repetición que nos permite ejercer secuencias de acciones hasta que podamos realizarlas de forma automática como operaciones secuenciales con poco esfuerzo consciente. Este mundo está constituido por los símbolos que utilizamos para el cálculo y la manipulación aritmética, algebraica, el cálculo y así sucesivamente, donde no sólo se especifican las operaciones que se pueden realizar con ellos, sino que además, operan como entidades mentales que ellos mismos pueden realizar, es decir, con el tiempo el uso de la manipulación de símbolos puede dar lugar a una forma de realización conceptual significativa (Ibíd.). El ***tercer y último mundo*** se basa en las propiedades, expresada en términos de definiciones formales y que son utilizadas como axiomas para especificar las estructuras matemáticas (Ibíd.).

Desarrollo del Conocimiento en los Mundos de la Matemática

La concreción de los tres mundos de la matemática propuestos por Tall y colaborados, emerge -entre otras cosas- de su contacto con las ideas piagetianas que lo llevaron a vislumbrar tres tipos diferentes de surgimiento del objeto: (1) aquéllos derivados de la *abstracción empírica* que estudia los objetos y sus propiedades, (2) los que surgen en lo que Piaget denomina *abstracción pseudo-empírica* centrada en acciones (contar) que están simbolizadas y comprimidas mentalmente como conceptos (el número), y (3) los que emergen a partir del estudio de las propiedades, las deducciones lógica y que yacen en el enfoque formalista de la matemática moderna (Tall, 2004a, 2004b, 2013).

Elucubraciones que le permitieron -en lo sucesivo- proponer tres tipos de abstracciones que emergen desde procesos mentales, siendo estas: (1) de *abstracción estructural* (que opera en los objetos, a través de la percepción de similitudes y diferencias, para descubrir sus propiedades). (2) la *abstracción operacional* (que opera en los objetos para descubrir las propiedades de las operaciones, y que implica la práctica de una secuencia de acciones, donde los procesos se comprimen en un concepto mental, mediante la encapsulación); y se extienden a la (3) *abstracción formal* (que opera en las definiciones formales por medio del uso de un lenguaje cada vez más sofisticado para especificar y deducir nuevas propiedades formales).

Este proceso que desvela cómo se desarrolla el conocimiento matemático desde el emerger sus objetos, convoca a su vez al establecimiento de una tipología que los describa, que a saber de Gray y Tall (2001, p. 69, tr. libre) es caracterizada como:

Objetos embodied, como en la geometría, o desde la apoyadura en gráficas que comienzan con la fundaciones físicas y desarrollan constantemente cuadros mentales más abstractos a través de del uso jerárquico y sutil del lenguaje.

Objetos simbólicos, que actúan de manera transparente para cambiar de un “concepto mental a manipular” a un “proceso a realizar” a menudo inconsciente utilizando un algoritmo cognitivo aprobado.

Objeto axiomático, que yace en el pensamiento matemático avanzado donde los axiomas verbales/simbólicos se utilizan como base para el diseño y expansión de una teoría construida lógicamente.

En tal sentido, esta presentación -sucinta- atinente al desarrollo conocimiento matemático aglutinan e incardinan diversas aportaciones de teorías conceptualistas, psicolingüísticas y cognitivistas; y desde esta coloración pluridimensional deja ver una multiplicidad de matices producto de acciones que se visten, organizativamente, con un ropaje mediante: (a) el empleo de la intuición, la experiencia, la deducción y la asunción de resultados por autoridad (Weber, Inglis y Mejia-Ramos, 2014); y (b) la realización conceptual que combina los modos enactivo e icónico de la percepción y la acción humana (Tall, 2014).

Desplazando ahora nuestra atención al proceder investigativo que ensancha, solidifica y regula el conocimiento matemático, su autoría corresponde a un reducido número de personas que la desarrollan, cultivan, y la utilizan en situaciones de amplia diversidad; dicho proceso comporta ciertas fases (Hadamard, 1945, Dieudonné, 1989). Particularmente para Tall (2013) se dibuja en cuatro fases, definidas en términos de problemas, posibilidades, conjetura y prueba. Y sobre esta praxeología que engloba la estructura lógica de cómo es posible brindar nuevos aportes a esta ciencia, logramos identificar y categorizar aquellas acciones epistémicas y cognitivas subyacentes en las rutas, fases, metódicas contempladas por los matemáticos novatos y experto al momento de desarrollar sus producciones investigativas.

Desarrollo del Pensamiento en los Mundos de la Matemática

Enrumbarse hacia una aventura cuyo destino persigue un acercamiento al desarrollo del pensamiento matemático, no es una tarea sencilla; es difícil encontrar evidencias que impregnen todos los valiosos y diversos que comporta el pensamiento matemático. En esta investigación su estudio atiende a: (a) la visión multidimensional que comprenden lo estético y lo afectivo propuesta por Dreyfus y Eisenberg (1996), y desde su rostro cognoscitivo (b) los procesos cognitivos (Dreyfus y Eisenberg, 1996; Dreyfus, 2002) y los niveles de pensamiento sugeridos por Gray y Tall (2001).

Bajo esta premisa, divisamos rasgos y/o características que exhiben los pensamientos del matemático, configurados desde diversos procesos cognitivos que se complementan y se yuxtaponen dependiendo los requerimientos demandados. Procesos cognitivos que han sido escindido por Dreyfus (2002) considerando el componente psicológico tales como: *los de representar, conceptualizar, interiorizar, encapsular, inducir y visualizar*; y al componente matemático, entre ellos, *analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir*, *demostrar, formalizar*.

Respecto a los planteamientos policromáticos que ofrecen Dreyfus y Eisenberg en torno al pensamiento matemático y su desarrollo, estos alientan el reconocimiento de una visión que agrupa lo estético, lo afectivo y lo cognitivo, significando: (1) la necesaria consideración estética en los razonamientos que persiguen la producción y evaluación de los resultados matemáticos; (2) el papel que desempeña la autoconfianza en el pensamiento matemático; y (3) que la adición y combinación de procesos cognitivos permite aumentar la flexibilidad de los patrones del pensamiento matemático.

Por su parte, Gray y Tall (2001) desde un miramiento cognitivista explicitan el desarrollo del pensamiento matemático atendiendo ciertos niveles de comprensión:

Un nivel primitivo si sólo atiende a sus percepciones de los objetos corporificados
Un nivel más sofisticado, si luce un fácil movimiento hacia adelante para enfocarse en el simbolismo o volver a hacia las configuraciones de los objetos base.
Niveles superiores al perder contacto con el mundo real y convirtiéndose en pensadores formales.

La Praxis del Matemático: *Matices que revelan una distinción entre el matemático novato y el experto*

De esta línea se desprende un conjunto de estudios (Chi, Glaser y Farr, 1988; Pozo, 1994; Peinado y Leal, 2013; Tall, 2013) interesados en caracterizar al novato y al experto. Contemplamos en este manuscrito su presentación desde una presentación matricial, explicitando para ello, las categorías y sus características asociadas atendiendo las aportaciones de las fuentes consultadas.

Tabla Nro. 1: Atributos que revelan una distinción entre Matemático Novato y Experto

Categorías	***Caracterización***
El conocimiento que ostentan.	- El experto posee amplio conocimiento de dominio específico el cual está ricamente interconectado y jerárquicamente estructurado, poseen múltiples representaciones integradas y recuerdan mayor cantidad de información. - El novato posee un conocimiento almacenado cronológicamente, desconectado, desorganizado, amorfo, sus representaciones son pobremente formadas y sin relaciones. - El novato intenta darle sentido a las ideas formales: su mente está aún cargada de representaciones concretas e ideas simbólicas - El experto puede controlar sus propias destrezas. Este autoconocimiento les permite manifestar adecuadamente el camino para resolver los problemas.
Los procesos cognitivos activados al momento de resolver problemas.	- Los novatos se limitan a la acumulación de conocimientos, mientras que los expertos crean nuevos esquemas de organización de conocimiento. - Los expertos se guían por abstracciones conceptuales, mientras que los novatos lo hacen con objetos materiales en tiempo real.
La organización y jerarquización de las ideas al momento de resolver problemas.	- El experto organiza el conocimiento semántico en grandes unidades interrelacionadas. - El novato tienen el conocimiento factual disperso en pequeñas unidades; por eso representan los problemas ingenuamente (en relación a lo semántico) y en términos de características superficiales y específicas (conceptos). - El experto pasa más tiempo en analizar el problema desde un prisma cualitativo tratando de comprender el problema. - El novato pasa inmediatamente a la acción sin analizar adecuadamente todos los elementos que constituye el problema. - El novato es más superficiales ante los problemas, mientras que los expertos profundizan más en la solución. Los expertos y los novatos pueden tener categorías conceptuales semejantes, pero los expertos las tienen basadas en principios, los novatos en ideas superficiales.

Fuente: Elaboración propia

Los planteamientos descritos ofrecen al estudio, el otorgamiento de insumos, como guía para el reconocimiento de ciertos atributos que nos permitieron clasificar al matemático en novato y experto; así como también, el respaldo y justificación de dicha designación.

Ruta metodológica

Responder a nuestras inquietudes e intencionalidades de la investigación y mostrar una aproximación de los procesos cognitivos que activan los matemáticos expertos y novatos -versionantes del estudio- al momento de generar las soluciones a ciertos problemas matemáticos, nos ha llevado a un estudio de tipo cualitativo e interpretativo, de carácter exploratorio y descriptivo.

Nuestro estudio, ubicado en un contexto epistémico-didáctico, se adscribe en su totalidad a la perspectiva de investigación cualitativa; metodología que representa una constante búsqueda de vías aproximativas tendientes a comprender e interpretar el entramado mundo de los fenómenos sociales -entre ellos los educativos- desde una óptica que reconoce su carácter complejo, dinámico, recursivo y cambiante.

Sumariamente y denotando las imbricaciones que prefiguran el sentido investigativo se establece entonces, que el hecho de involucrar a los investigadores y a los entes investigados -matemáticos expertos y novatos- en una realidad que busca desocultar las acciones y procesos del matemático a la hora de generar matemática, hizo necesario enmarcarnos en el paradigma interpretativo.

Respecto a los versionantes seleccionados para nuestro estudio consta de once (11) matemáticos a quienes hemos clasificado como *experto* y *novato*. Su distribución quedó de la siguiente manera: Tres (3) *matemáticos expertos* de amplia trayectoria que son Docentes-investigadores universitarios, que hemos denotado por D_1, D_2, D_3; y Ocho (8) *matemáticos novatos* que están desarrollando (7 de 8) o realizaron (1 de 8) estudios de cuarto nivel en el Programa de Maestría Interinstitucional en Matemática, convenio UCLA-UNEXPO-UPEL y que hemos denotado por M_1, M_2,…, M_8.

Este recorrido investigativo, requirió a su vez de metodologías específicas que faciliten, la organización, representación, clasificación e interpretación de las respuestas que los matemáticos dan a las cuestiones que se les plantean en este estudio. Por ello optamos por usar como sistema de representación de las respuestas, las llamadas redes sistémicas (Bliss, Monk y Ogborn, 1983), que permiten mirar todas las respuestas de los matemáticos encuestados de manera efectiva.

En el estudio las redes se estructuran asumiendo la forma de árbol con ramas que se subdividen en "clases" (se usa como formalismo la barra (|), que son categorías que se excluyen entre ellas), y en "aspectos" (se usa la llave ({) para indicar que son categorías no excluyentes). Con la llave (}) se indica que la nueva categoría incluye las anteriores. Al final de cada rama se registra el matemático que ha dado una respuesta que puede ser interpretada bajo esa etiqueta (Valdivé y Garbin, 2008; Valdivé, 2008; Sánchez y Valdivé, 2012).

La información organizada permitió la elaboración de 6 redes sistémicas atinentes a las acciones y cognitivas de los matemáticos categorizados a partir del análisis de la información suministrada -3 para los matemáticos novatos y 3 para los expertos-. Debido al alto número de redes sistémicas construidas, en este artículo mostramos sólo algunas de ellas como se evidencia más adelante.

El Cuestionario: *Tasaciones que transparentan su elaboración y Análisis*

El cuestionario consta de seis (6) preguntas; los planteamientos que permitieron redactar las preguntas o problemas del cuestionario surgieron desde las asunciones y apreciaciones encontrados en la revisión teórica, en atención al desarrollo del conocimiento y el pensamiento matemático.

Se diseñaron dos cuestionarios, uno de ellos, aplicado a los matemáticos novatos (usaremos CN para referirnos al mismo), y el otro, a los matemáticos expertos (denotado en el estudio por CE), cuya única diferencia consistió que al cuestionario de los matemáticos novatos se le incluyó un problema matemático a resolver -adicional a las seis preguntas del cuestionario-, esto debido a su breve andadura y/o poca actividad en el campo de la investigación en matemática.

El contenido considerado en los problemas incluidos en el cuestionario de los matemáticos novatos (CN), corresponden a la Topología Conjuntista. En suma contemplamos dos problemas matemáticos. El primero de ellos

(Problema 1) se le propuso a los versionantes (M_1; M_2; M_3; M_4; M_5; M_6 y M_7) y el segundo (Problema 2) al versionante (M_8), esto atendiendo al grado de experticia del matemático y que debía ser un problema no resuelto por ellos en la fecha que fue aplicado el cuestionario.

Problema 1	*Si un conjunto A contiene todos sus puntos fronteras, entonces A es cerrado*
Problema 2	*Sea $S \subset R^n$, probar que $S \bigcup \dot{S}$ es cerrado (donde $\dot{S}$ es el derivado de S formado por todos los puntos de acumulación de S)*

Las preguntas del cuestionario se describen a continuación:

1. Sitúese en el momento que inicias a abordar el proceso para llegar a la solución del problema, describe cómo nació, y trata de identificar y describir los primeros pensamientos que le vinieron en mente, independientemente que hayan sido verdaderos o falsos.
2. ¿Estableció algunas conjeturas?, de ser afirmativo, ¿en qué se basó para seleccionar aquellas conjeturas más adecuadas según el problema en estudio?
3. ¿Podrías identificar si has usado algún tipo de representaciones?, es decir, ¿considera que se ha mantenido sólo dentro de la problemática teórica, o has usado, dibujos, representaciones, conceptos que puedas reconocer básicos dentro de la matemática?
4. ¿En qué momento crees llegó a la convicción de que la conjetura era cierta y el proceso de solución adecuado?
5. ¿Cómo crees pudo llegar a la demostración formal?, ¿de qué o en qué se apoyó?
6. ¿Se mantuviste siempre en el mismo contexto matemático?

Análisis y hallazgos

Para el análisis tomamos en cuenta las posturas y planteamientos situados en evidencias teóricas. Referentes que le ofrecieron a los investigadores una diversidad de conceptualización, caracterizaciones relativas al desarrollo del conocimiento y pensamiento matemática -especialmente desde una visión cognitiva-evolutiva- que nos sirven como marco para interpretar -desde un proceso reflexivo, argumentativo y contrastante- las respuestas de los matemáticos.

Análisis de las Respuestas del Cuestionario: *Trazado que muestra ideas primitivas asociadas al hacer cognitivo y epistémico del matemático*

Observamos un alto número de respuestas contestadas después de la aplicación de los cuestionarios (CN y CE) al grupo de los 8 matemáticos novatos y 3 expertos. Para el análisis de las respuestas, hemos considerados estudiar en conjunto las preguntas 1) y 2) -por representar las fases previas a la prueba-; y las preguntas 4), 5) y 6) -que aluden al proceso de prueba en sí y sobre las convicciones y creencias que de ella se derivan-; con respecto a la pregunta 3) su estudio se hace por separado, la presencia de este proceso cognitivo -la representación- se manifiesta en diversos momento del hacer matemático y evoca otros procesos cognitivos[1]. Por cuestiones de espacio, en este artículo sólo mostramos el análisis de las preguntas: 1, 2, 4, 5 y 6.

Análisis Interpretativo-Descriptivo por Preguntas del Cuestionario (CE y CN)

Presentamos el análisis de cada pregunta, implementado la metodología asumida en Valdivé (2008); en tal sentido se muestran (a) la pregunta o preguntas del cuestionario y (b) la red sistémica correspondiente a cada cuestión. En la red y en el análisis de las respuestas emitidas por los matemáticos, utilizamos letra itálica (cursiva) para reflejar las palabras textuales que aparecen en el escrito del versionante.

Análisis Interpretativo-descriptivo de las Preguntas 1 y 2

1. Sitúese en el momento que inicias a abordar el proceso para llegar a la solución del problema, describe cómo nació, y trata de identificar y describir los primeros pensamientos que le vinieron en mente, independientemente que hayan sido verdaderos o falsos.
2. ¿Estableció algunas conjeturas?, de ser afirmativo, ¿en qué se basó para seleccionar aquellas conjeturas más adecuadas según el problema en estudio?

Análisis de los testimonios del Matemático Experto a las preguntas 1 y 2 (Ver Figura 1)

- *Desde un punto de vista epistémico*

Encontramos que los matemáticos (D_1, D_2) comentan que al toparse con un problema matemático, los primeros pasos que comporta su andadura hacia la solución, contemplan la lectura comprensiva del enunciado del problema, lo que los lleva necesariamente a la revisión y contrastación de las definiciones y propiedades que envuelven dicha actividad epistémica. Adentramiento y robustecimiento de su capital teórico que según D_2 le sigue la delimitación y puntualización de las herramientas teóricas con las que se apoyará en su misión solucionadora y constructora de conocimiento matemático.

Para los matemáticos (D_2, D_3), este tramo inicial que configura su aventura epistémica, se sirve de diversas acciones, entre ellas, el uso de ejemplos o casos particulares. Interpretamos que el uso de evidencias empíricas les permita no sólo, situarse en los requerimientos y alcances del problema de interés, sino además, analizar ciertos casos para dilatar su convicción en torno a él; ideas que se corresponden, en parte, con lo expresado en Weber, Inglis y Mejia-Ramos (2014).

Figuras 1 y 2. Redes sistémicas de las respuestas a las preguntas 1 y 2

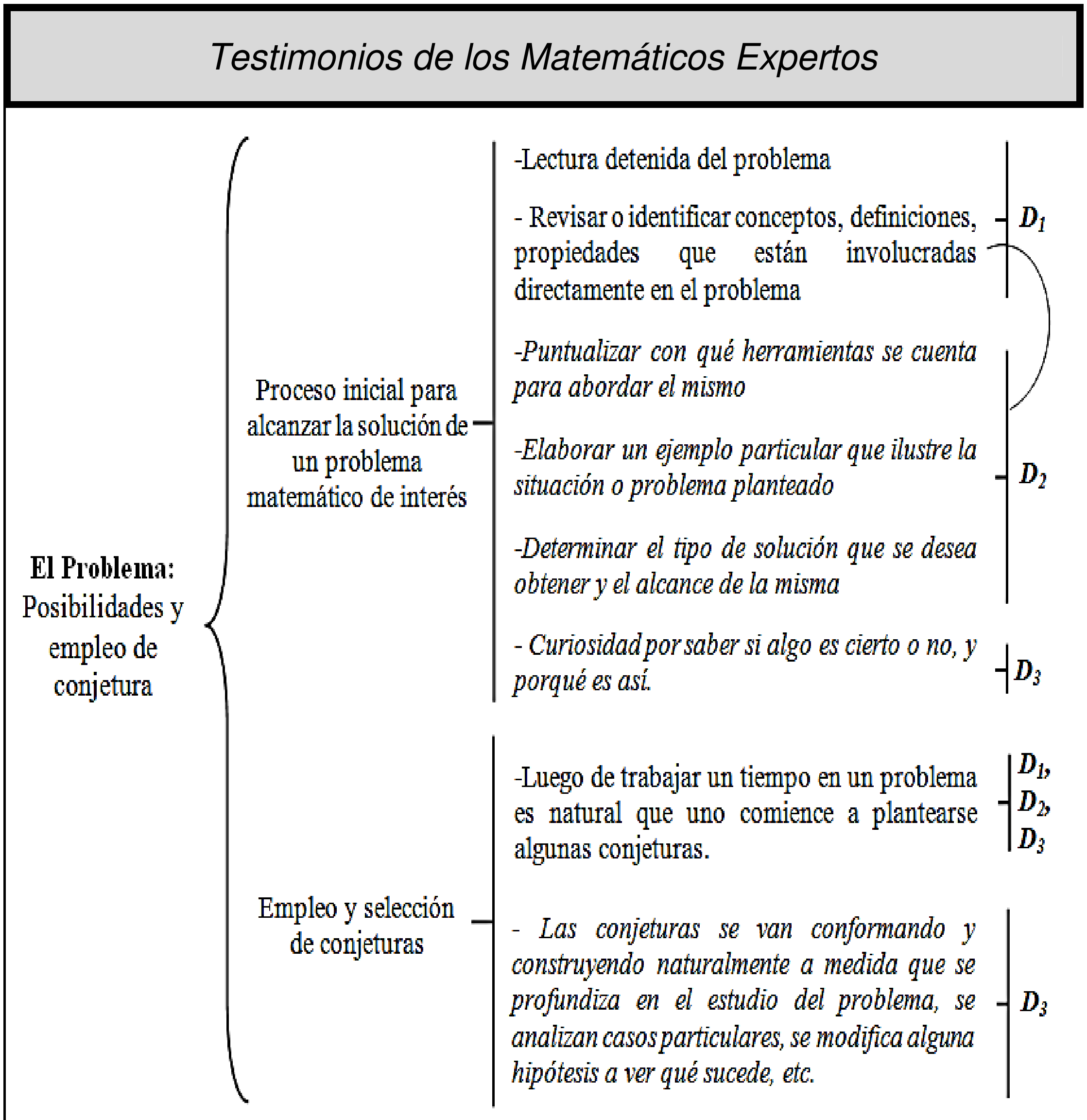


Figura 1: Red sistémica de las preguntas 1 y 2 del cuestionario (CE).

Fuente: Elaboración propia

Continuación **Figuras 1 y 2**

Testimonios de los Matemáticos Novatos

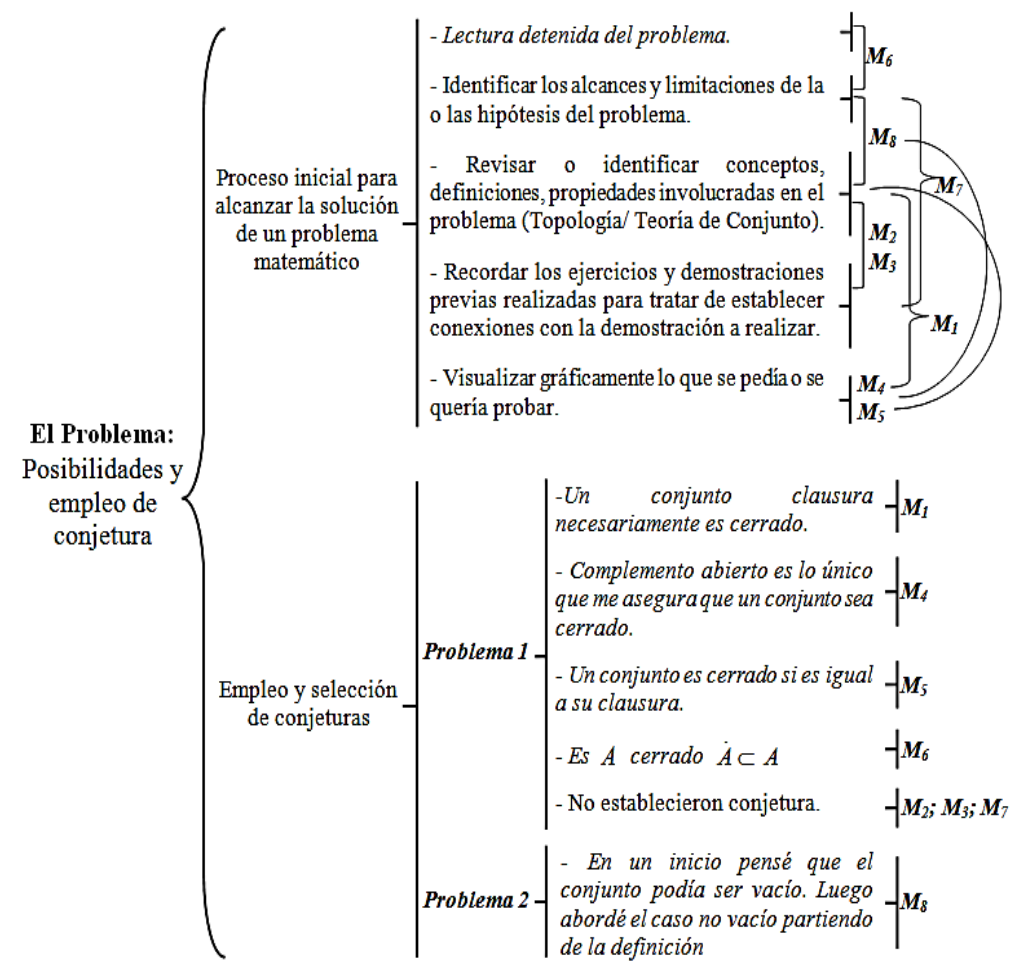


Figura 2: Red sistémica de las preguntas 1 y 2 del cuestionario (CN).

Fuente: Elaboración propia

El matemático (D_2) arguye que el comienzo de esta travesía, requiere además determinar el tipo de solución y alcance, que se desea brindar de la situación o problema. Lo que nos lleva a pensar que el matemático sitúa sus acciones y aportaciones en diverso mundo de la matemática -embodied, proceptual y formal- (Tall, 2002a, 2002b, 2013), dependiendo los requerimientos y pretensiones que espera ofrecer respecto a los problemas que investiga.

Otro aporte significativo, emana de la respuesta del matemático (D_3) quien relata que el preludio de su hacer para encarar una situación problemática de interés, se configura desde procesos no unívocos, activados por la curiosidad de averiguar si algo es o no verdadero y las razones que justifican tal aseveración. Afirmando que:

> *D_3: El proceso no es siempre igual, pero al comienzo lo que predomina es **la curiosidad por saber si algo es cierto o no, y porqué es así**.*

Ideas que transparentan un hacer que viste a la matemática como una actividad humana (Fischbein, 2002). Un hacer que persigue la convicción más que la comprobación de los enunciados que la configuran y expanden; y que va en la búsqueda y aprehensión de aquellos principios que explicitan el porqué de su funcionamiento.

En torno al empleo y selección de conjeturas, los matemáticos (D_1, D_2, D_3) coinciden que al sumergirse en este proceso epistémico y generador de conocimiento matemático, es natural el planteamiento de conjeturas, las cuales -según D_3- se van conformando a medida que se profundiza en el estudio del problema. Ideas que significan el papel imprescindible que ostenta el uso de conjeturas en la formulación del conocimiento matemático. Además, que las conjeturas se visten desde un razonamiento intuitivo, preformal (Marmolejo y Moreno, 2011), el cual comporta proceso de ajustes y reajustes a medida que se avanza en la solución del problema (Goizueta, 2015).

- *Desde un punto de vista metodológico*

Las respuestas ofrecidas por los matemáticos (D_1, D_2, D_3) en las preguntas 1) y 2) del cuestionario se ubican en la primera, segunda y tercera fases que luce el proceso investigativo-matemático contemplado por Tall (2013); en tal sentido, observamos que el proceso que exhibe el desarrollo del conocimiento matemático inicia mediante el reconocimiento de un problema -*Primera fase*-; luego se estudian posibilidades -*Segunda fase*- asistidas y cobijadas, en este caso, mediantes el reconocimiento de ciertas definiciones, propiedades y teoremas (D_1, D_2); y el uso de ejemplos particulares (D_2). Le sigue a esta actividad epistémica, la confección de conjeturas (D_1, D_2, D_3) -*tercera fase*- que se van validando a media que se avanza en la solución del problema desde las argumentaciones que afloran al estudiar casos particulares o al modificar ciertas hipótesis (D_3).

Análisis de los Testimonios del Matemático Novato a las Preguntas 1 y 2 (Ver Figura 2)

- *Desde un punto de vista epistémico*

Encontramos que el matemático (M_6) sostiene que uno de sus primeras acciones ejecutadas al resolver un problema matemático es la lectura detenida y profunda del enunciado que lo configura. A esta acción le sigue la identificación de los alcances y limitaciones que ostentan la o las hipótesis de la situación problemática (M_6, M_7, M_8), que les permitió (M_6, M_7) aventurarse en la escogencia metódica para hacerle frente al problema.

Para los matemáticos (M_1, M_2, M_3, M_4, M_7, M_8) las primeras ideas y acciones que emergen al toparse con un problema matemático, consiste en la búsqueda y/o recordatorio del cuerpo teórico que arropa la tarea epistémica, tal como lo expresa Valdivé (2013) quien sostiene que los matemáticos consideran el dominio de las definiciones y el contexto fundamentales en su hacer.

Otras consideraciones que registran las primeras pinceladas que produce el matemático al resolver problemas, atienden, por un lado, el empleo de gráficos -objetos embodiment- (M_1, M_4, M_5, M_8), en miras de alcanzar algunas pistas o ideas introductorias que favorezcan en el proceso investigativo que encaran, y por el otro, la apoyadura en experiencias previas (M_1, M_2, M_3, M_7) -ejercicios resueltos, demostraciones realizadas- que les permita activar ciertas analogías que coadyuven con el problema que investigan. Asunciones que visibilizan un proceder que matiza y articula lo empírico, deductivo y lo autoritario (Weber, Inglis y Mejia-Ramos, 2014).

Respecto al empleo y selección de conjeturas, pudimos observar que un gran número de matemáticos (M_1, M_4, M_5, M_6, M_8), consideraron configurar una conjetura relativa al problema solicitado, que emerge como consecuencia de esa mirada inicial que desentrañó la lectura reflexiva del enunciado y la visualización gráfica que comportan ciertas propiedades atinentes al problema; situación que revalida el papel estelar que ostenta el uso de conjeturas en el desarrollo del conocimiento matemático (Marmolejo y Moreno, 2011; Larios, 2015).

- *Desde un punto de vista Metodológico*

Las respuestas aportadas por los matemáticos (M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8) en las preguntas 1) y 2) del cuestionario se sitúan en la primera, segunda y tercera fases del proceso investigativo-matemático propuesto por Tall (2013). Visibilizando que el proceso de desarrollo del conocimiento matemático inicia mediante el reconocimiento de un problema -*primera fase*-; le sigue el estudio de ciertas formas alternativas que les permitió atacar el problema -*Segunda fase*-, en este caso, con apoyadura en gráficos (M_1, M_4, M_5, M_8); la ubicación y reconocimiento de algunas definiciones, propiedades y teoremas (M_1, M_2, M_3, M_4, M_7, M_8); y el uso de la experiencia (M_1, M_2, M_3, M_7). Sumariamente, se sirven de la elaboración de conjeturas (M_1, M_4, M_5, M_6, M_8) -*tercera fase*- como afirmaciones que pretenden ser verificadas (Larios, 2000).

Análisis Interpretativo-Descriptivo de las Preguntas 4, 5 y 6

4. ¿En qué momento crees llegó a la convicción de que la conjetura era cierta y el proceso de solución adecuado?:
5. ¿Cómo crees pudo llegar a la demostración formal?, ¿de qué o en qué se apoyó?:
6. ¿Se mantuviste siempre en el mismo contexto matemático?

Análisis de los Testimonios del Matemático Experto a las Preguntas 4, 5 y 6 (Ver Figura 3)

- *Desde un punto de vista epistémico*

Para el matemático (D_1) su convicción de que una conjetura es cierta dependerá de (a) la existencia de conexiones lógicamente establecidas entre las relaciones que emanan las propiedades del enunciado, (b) si experiencias previas así lo indican, o (c) mediante el empleo de diversos ensayos con procedimientos algebraicos. Apreciación que corrobora la premisa que establece que los matemáticos ganan convicción no sólo desde evidencias deductivas, sino que también se sirven de evidencias empíricas y autoritarias, aun cuando estas últimas no garanticen la verdad absoluta (Weber, Inglis y Mejia-Ramos, 2014).

La respuesta emitida por el matemático (D_2) refleja que su convicción de certeza ante una conjetura, requiere la comprobación -en un plano teórico-formal- de la validez de los argumentos empleados en el proceso de solución. Postura que legitiman: (a) el papel que ostenta -nuevamente- el dominio de las definiciones (Valdivé, 2013) para la validación del conocimiento matemático, y (b) que la praxis del matemático se aloja en el mundo formal de las matemáticas (Tall, 2013) donde el orden de verdad que garantiza la validez de los enunciados matemáticos sólo se obtiene mediante la prueba deductiva-formal (Tall, 2004a).

Por su parte, el matemático (D_3) sostiene que la creencia y convicción de certeza en las conjeturas matemáticas es paralelo a su conformación, no ameritan enrumbarse en un proceso para alcanzarlas, pero si, aquel que garantice su validez. Afirma además, que lo que demanda convicción es la escogencia metódica, asegurando que sólo se convence de su eficacia luego de utilizarla. Planteamientos que evidencian que el matemático en su hacer parte de enunciado en los cuales deposita un conocimiento tácito, es decir, parte de verdades personales incontrovertibles (Sánchez, 2016), que los anima a corroborarlo desde la prueba.

Respecto a la concreción y validación de la prueba formal que en definitiva exhibe-desde argumentos sofisticados y convenidos por los matemáticos- la solución del problema que investigan; Interpretamos de las respuestas de los versionantes que los matemático conciben el proceso de prueba como una actividad humana (Fischbein, 2002), que conjuga, atiende o reconoce experiencias previas (D_1), uso de ejemplos particulares (D_1; D_2), ilación entre argumentos emergentes entre las propiedades involucradas en el enunciado (D_1), en suma una actividad consecuencia de un proceso preformal y creativo (D_3).

Otros aspectos que yacen en las respuestas de los versionantes en atención a la prueba, corresponde a ese período de sobriedad que lleva a cabo el matemático luego de obtener la solución del problema. Para D3, -como ya hemos indicado- tiene que ver con la etapa de formalización, que le sigue de una fase previa configurada por un accionar creativo de mayor valor epistémico. Sin embargo D_2 expresa:

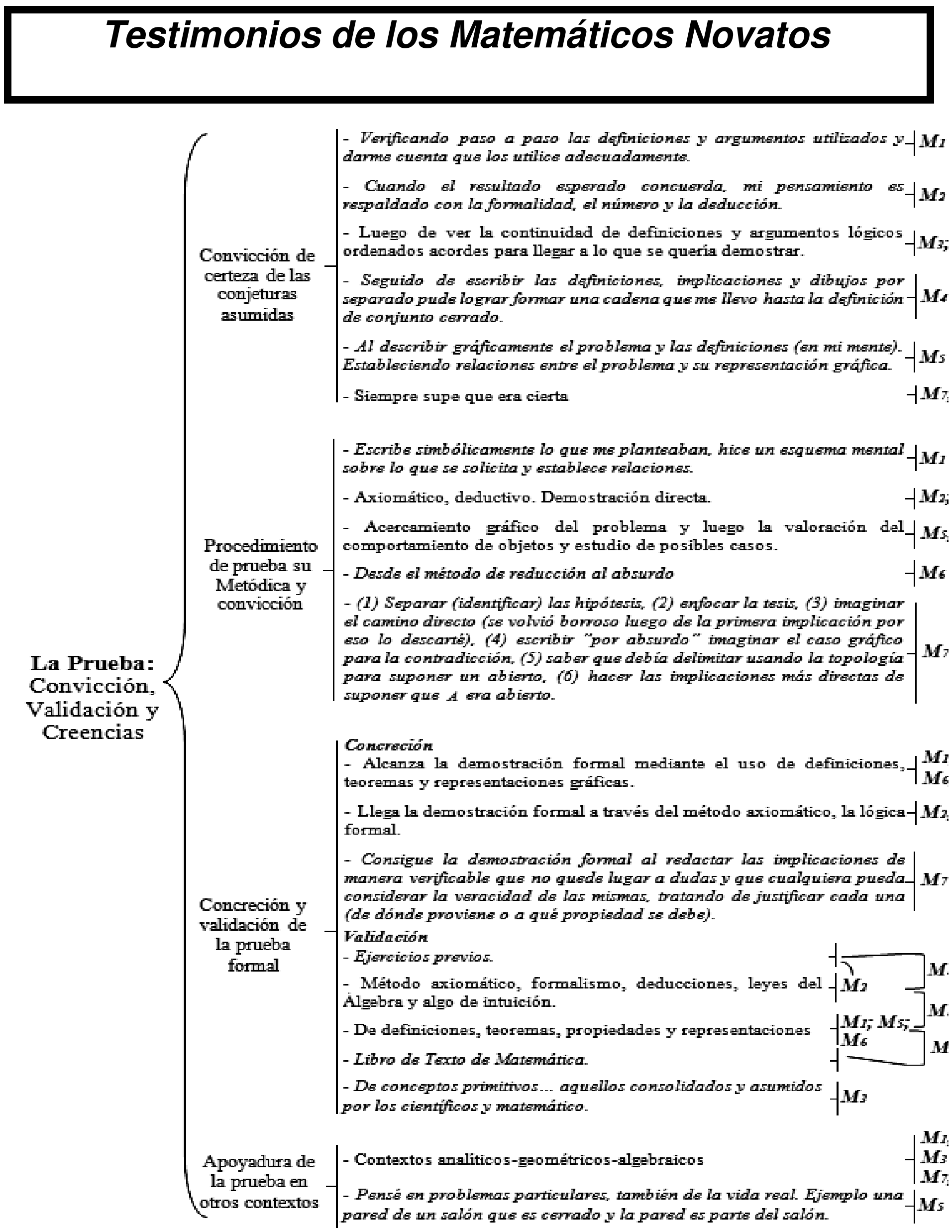
Figuras 3 y 4. Redes sistémicas de las respuestas de las preguntas 4, 5 y 6 del matemático experto y novato.

Testimonios de los Matemáticos Expertos

La Prueba: Convicción, Validación y Creencias

- Convicción de certeza de las conjeturas asumidas
  - *- Cuando las relaciones entre las propiedades están lógicament conectadas.*
  - *- Cuando otras experiencias así lo indican.*
  - *- Por medio de procedimientos algebraicos en diversos ensayos*
  - *- Al poder comprobar de manera formal y teórica, la validez de todos los argumentos y teorías usadas en el proceso de la solución*
  - *- Desde el momento en que se formula una conjetura uno "cree" que es cierta, ese es el sentido de las conjeturas en matemática. algo que uno cree que es cierto pero que no ha podido probar.*
- Procedimiento de prueba su Metódica y convicción
  - *- No suelo convencerme de que el método utilizado sea efectivo hasta haber completado una solución (bueno, salvo en cierto. casos en que la confianza en el método es muy grande).*
- Concreción y validación de la prueba formal
  - **Concreción**
  - *- He llegado a la demostración formal haciendo uso de todos lo. elementos expuestos en la conjetura, las relaciones entre su. propiedades, experiencias pasadas.*
  - *- Para escribir la demostración definitiva y formal, es de gran ayuda escribir una primera versión que refleje la solución ta cual se tiene, a primera instancia, en la mente. Luego leerla po. lo menos tres veces buscando refinar la redacción de la misma tomando en cuenta la compresión y claridad en la escritura.*
  - *- Para mí la demostración formal es una simple cuestión técnica que viene después de haber resuelto el problema "informalmente". La etapa creativa de la solución es informal pero es lo más importante. La formalización es simplemente un trabajo de clarificación y adaptación a un lenguaje convencionalmente aceptado para la comunicación de resultados.*
  - **Validación**
  - *- Métodos de demostración directa e indirecta. Ocasionalment alguna construcción útil para lograr objetivo principales.*
  - *- Un gran apoyo es estudiar un ejemplo matemático particula. que ilustre el problema para observar qué condiciones se cumplen o fallan, para así tener una idea inicial sobre qué se debe comprobar.*
- Apoyadura de la prueba en otros contextos
  - *- Para la demostración formal es necesario mantenerse en e mismo contexto. Es posible cambiar de contexto con la finalidad de lograr comparaciones, pero siempre se retorna al original.*
  - *- En cuanto al contexto matemático, no todo el tiempo uno se mantiene al 100% en el, muchas veces es saludable y de mucho ayuda, relacionar el problema (de ser posible) con algún fenómeno físico y tratar de estudiar el comportamiento de dicho fenómeno, para ver si aporta alguna luz o idea que induzca la solución del problema.*

Continuación Figuras 3 y 4



Fuente: Elaboración propia

> *D_2: …es de gran ayuda escribir una primera versión que refleje la solución tal cual se tiene, a primera instancia, en la mente. Luego leerla por lo menos tres veces **buscando refinar la redacción de la misma, tomando en cuenta la compresión y claridad en la escritura.***

Planteamientos que valorizan el necesario espacio demandado por el matemático, luego de resolver el problema, que le permite validar y solidificar los argumentos implementados, pero además, revela y refrenda el hecho que el conocimiento matemático se desarrolla con apoyadura en el simbolismo y el lenguaje (Tall, 2013).

- *Visto como un Proceso de pensamiento*

Encontramos que esta visión heterogénea de la prueba revelada por los versionantes, alienta -a su vez- la activación de diversos procesos de pensamiento, alojados en los niveles primitivos, sofisticados o superior propuestos por Gray y Tall en el 2001.

Podemos ubicar a los matemáticos (D_1, D_2, D_3) en un *nivel primitivo*, situándonos en el relato ofrecido en la pregunta 3) donde describen cómo en su andadura -sobre todo inicial- en la resolución de los problemas matemáticos que investigan, se sirven de objetos embodiment -gráficos y dibujos-, atendiendo -en este caso- a la percepción de objetos corporificados. O en un *nivel sofisticado*, cuando los matemáticos (D_1, D_2) sostienen que se apoyan en ejemplos particulares, empleando procedimientos algebraicos, enfocando su accionar en el simbolismo. Pero sobre todo, podemos localizar su accionar en un nivel superior independiente del mundo real, que persigue la formalización desde la relación y comprensión de las propiedades estructurales de los conceptos formales (D_1, D_2, D_3), que facilita en ellos una flexibilidad y sencillez de pensamiento (Gray y Tall, 2001).

Consustanciados con las apreciaciones descritas en el párrafo anterior, también podemos situar las aportaciones de los versionantes respecto a la prueba en la caracterización contemplada por Tall (2002), siendo estas: (a) *prueba embodied*, donde la verdad se alcanza desde la percepción -uso de dibujos y gráficos (D_1, D_2, D_3)-, (b) *prueba proceptual*, que recurre al cálculo y la manipulación para determinar la verdad (D_1, D_2) y (c) *prueba formal*, construida por deducción formal con apoyadura en las definiciones y propiedades involucradas en el enunciado del problema (D_1, D_2, D_3).

Interpretación que legitima el hecho de que la prueba -idea central del mundo formal- tiene manifestaciones anteriores en el mundo embodied y de proceptos, y arrastra un proceso de desarrollo cognitivo largo y complejo, que se va refinando desde diferentes orden de verdad situados en los mundos de las matemáticas -muchos de los cuales se apoyan en argumentos que el matemático reconoce pero no le asigna el estatus de prueba- y que ofrece un enfoque alternativo que abarca nociones más amplias de validez (Tall, 2002).

Asimismo, se viste de un proceso evolutivo que suponen una adhesión a un pensamiento matemático que emerge y se configura desde la experiencia y la manipulación mental -asistido por los *esquemas conceptuales* que ostentan los matemáticos- que los lleva a concebir e incardinar, ideas, imágenes, posibles definiciones y teoremas -que podrían derivarse de otras definiciones- (D_1, D_2), lo que revela una potencial vía de la intuición a la formulación de teoremas desde la prueba formal (ibídem).

Otro aspecto valioso de reseñar en esta actividad de análisis, es la mostración de otra de las dimensiones que ostenta el proceso de prueba -en este caso la afectiva-, a través del testimonio ofrecido por el matemático (D_3), quien atendiendo a su apreciación de la metódica seleccionada para enfrentar los problemas que investiga, expresa:

> *D_3: No suelo convencerme de que el método utilizado sea efectivo hasta haber completado una solución (**bueno, salvo en ciertos casos en que la confianza en el método es muy grande**).*

Aseveración que convalida que la actividad epistémica que materializa el matemático contempla la existencia de una relación simbiótica entre el progreso y la confianza (Dreyfus y Eisenberg, 1996).

- *Desde un punto de vista metodológico*

Los diversos planteamientos, posturas y/o consideraciones que testifican los matemáticos (D_1, D_2, D_3) a las preguntas 4), 5) y 6), desvelan un accionar epistémico, que estiliza las rutas -formales o informales-, criterios de verdad, razonamientos o de niveles de pensamiento; así como también, la ubicación de su praxis en diversos tipos de pruebas y contextos.

Análisis de los Testimonios del Matemático Novato a las Preguntas 4, 5 y 6 (ver Figura 4)

- *Desde un punto de vista epistémico*

Encontramos que para los matemáticos (M_1, M_3, M_4, M_6) su convicción de que una conjetura es cierta dependerá de la adecuación, ordenamiento y continuidad del encadenamiento de pasos registrados para su validez, con su respectiva fundamentación teórica. Los versionantes dejan ver en sus testimonios la valoración que le asignan (a) al conocimiento del cuerpo teórico que arropa el problema en estudio, y (b) al reconocimiento de diversos procesos en su andadura hacia la prueba, asistidos por argumentos lógicos (M_3, M_6) y el empleo de dibujos -objetos embodiment- (M_4), respaldando sus hallazgos mediante argumentos situados en el trinomio intuitivo-empírico-deductivo (Fischbein, 2002; Weber, Inglis y Mejia-Ramos, 2014). Además, atendiendo a la ruta de construcción relatado por M_4, muestra un proceso evolutivo y de refinación de objetos embodied que comienza con la percepción sensorial y se purifica en el pensamiento a través del uso del lenguaje (Gray y Tall, 2001).

Desde la óptica del matemático (M_2) su convicción de que una conjetura es cierta dependerá de la manifestación de un proceso simbiótico entre el resultado y sus pensamientos, acontecimiento que yace respaldado desde la deducción. Interpretamos de su respuesta, que los matemáticos gobiernan su actuación contemplando un proceso isomorfo entre el desarrollo del conocimiento y el pensamiento matemático; proceso que refina su comprensión y auspicia a su vez la regulación y expansión del conocimiento matemático. Asimismo, presenta que la convicción de certeza de una conjetura matemática se alcanza desde el respaldo que ofrece la deducción y la formalidad, acciones metódicas y psicológicas que se alojan en el mundo formal (Tall, 2013).

La respuesta emitida por el matemático (M_5) refleja que su convicción de certeza ante una conjetura matemática, requiere el establecimiento de relaciones entre los elementos y/o propiedades que dimanan los objetos embodiment -icónicos o gráficos- del problema que se estudia y las definiciones matemáticas asociadas. Planteamientos que nos lleva pensar que los matemáticos también adquieren convicción ante una conjetura desde la combinación o asistencias de diversas fuentes de conocimiento, estilizando los aportes que subyacen entre las relaciones que aflora este proceso comparativo, además de legitimar, el hecho de que el matemático combina los modos icónico y simbólico de la percepción y la acción humanas (Tall, 2014) en su acción investigativa y constructora del conocimiento matemático.

Por su parte, los matemáticos (M_7, M_8) exponen que no requerían aventurarse en un proceso indagatorio para creer y convencerse de que las conjeturas construidas para encarar el problema eran ciertas, pues estaban convencidos desde el momento de su conformación, con apoyadura en las definiciones y conocimientos previos, apreciaciones que dejan ver que el desarrollo del pensamiento y la prueba se alimenta de las experiencias previas -met-befores- del matemático (Tall, 2014).

Dirigiendo ahora nuestra atención a las apreciaciones que los matemático

(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8) le asignan al procedimiento implementado para darle solución al problema y a la convicción que ostentan del mismo, encontramos que los matemáticos (M_1, M_5, M_7, M_8) contemplan que sus rutas de actuación se apoyan inicialmente desde representaciones gráficas o simbólicas que los llevó luego a (a) fraguar un esquema metal y establecer relaciones (M_1), (b) evaluar algunos casos emergentes (M_5; M_7), y (c) delimitar el enunciado mediante el uso de la topología y establecer una nueva implicación consustanciada con la metodología a aplicar. El resto de los matemáticos (M_2, M_3, M_4, M_6) volcaron su mirada para reconocer un proceso investigativo que se gesta desde acciones metodológicas consistentes con el método axiomático, en particular, testifican que su travesía se auxilió con el método directo (M_2, M_3, M_4) o el método indirecto de reducción al absurdo (M_6).

Valoración procesual asistido con una brújula que ubica nuevamente la acciones del matemático como un proceso evolutivo y refinado que se sirve de objetos matemáticos: embodiment, simbólicos y axiomáticos; objetos que son como trampolines que transforman un objeto de orden inferior -embodiment- en uno de orden superior -axiomático- (Gray y Tall, 2001).

En lo concerniente a la concreción y validación de la prueba formal, atendiendo a la pregunta 5) del cuestionario, observamos que los matemáticos conciben que alcanzaron la prueba formal: (a) enlazando definiciones, teoremas, y las relaciones que ellas dimanan (M_1, M_5, M_6, M_8), (b) cobijado con el método axiomático y la lógica formal (M_2, M_3, M_4), y (c) mediante un discurso bien fundamentado que aúpa la convicción de certeza de posibles lectores (M_7). Validando nuevamente la valoración que le asigna el matemático al dominio de las definiciones involucradas en su actividad epistémica (Valdivé, 2013), que la ubicación de los hallazgos definitivos del matemático reposa en el mundo formal (Tall, 2013) y transparenta un concepción de la prueba acoplada al hacer global (De Lorenzo, 1998) que persigue eliminar todas las dudas personales o para persuadir a otros que la conjetura es cierta (Harel y Sowder, 1998).

Divisando más de cerca los medios y apoyadura de los cuales se sirve el matemático para alcanzar la prueba formal, pudimos apreciar que los matemáticos se sirven de: (a) procedimientos deductivos e inductivos (M_2, M_4, M_8), (b) definiciones, teoremas y representaciones (M_1, M_5, M_6, M_7, M_8), (c) lo establecido en libros de texto de matemática (M_7) y (d) de conocimientos ya convenidos y validados por los matemáticos (M_3).

- *Visto como un Proceso de pensamiento*

En esta andadura analítica con antifaces que intentan transparentar una cara cognoscitiva de la prueba matemática, observamos que las posturas y acciones que muestran los matemáticos (M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8) al momento de resolver el problema matemático solicitado y la apreciación que luego explicitan desde las respuestas a las interrogantes 4), 5) y 6) del (CN) denotan unas concepciones de la prueba que se cobijan en los niveles primitivos, sofisticados o superior propuestos por Gray y Tall, 2001.

Ubicamos a los matemáticos (M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8) en un *nivel primitivo*, atendiendo las consideraciones y acciones al responder el CN presentando cómo en su labor epistémica, se apoyan de objetos embodiment, asistidos por la percepción y acción. Asimismo, podemos situarlos en un *nivel sofisticado*, cuando los matemáticos (M_2, M_3, M_4) se apoyan en ejercicios previos y procedimientos algebraicos, centrando su accionar en el simbolismo. Pero además, podemos localizarlos en un nivel superior que se independiza del mundo real, y su accionar se reviste de formalidad centrándose en las relaciones entre propiedades estructurales de los conceptos involucrados en el problema en estudio (M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8).

Los niveles que subyacen en los pensamientos activados por los matemáticos, nos permite además ubicar sus producciones en los diversos tipos de pruebas consideradas por Tall (2004a); de ahí, situamos a los matemáticos en: (1) *Prueba Embodied*, al ver como en cierta fase de la prueba la verdad resultaba desde la percepción -uso objetos embodiment- (M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8)-, (2) *prueba proceptual*, cuando se apoyaban en el cálculo y la manipulación para determinar la verdad (M_2, M_3, M_4) y (3) prueba formal, al presentar sus hallazgos finales, con una ruta deducción formal respaldada por las definiciones y propiedades involucradas con la situación problemática (M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8).

Apreciaciones que legitiman nuevamente cómo la prueba formal que

comúnmente observamos en los libros de texto o revistas especializadas, tiene manifestaciones anteriores en el mundo embodied y de proceptos (Tall, 2013) y que cimentada en un proceso evolutivos que se alimenta por los esquemas conceptuales, lleva a su artífice a desplazar y refinar los hallazgos parciales, y así vestir un conocimiento que emerge desde la intuición e informalidad, con un ropaje deductivista que le otorga formalidad.

Otro aspecto presente en esta tarea de análisis -aunque no de manera extensiva, explicita y detallada- y que refrenda lo enunciado por (Dreyfus y Eisenberg, 1996)[2] y Valdivé (2013)[3] refiere a la activación e imbricación de diversos procesos cognitivos por el matemático al momento de afrontar y edificar la prueba; entre ellos, la conjeturación, la representación -como ya hemos explicitado en gran parte de este análisis-, la intuición, la formalización, la comprobación, la estructuración y la abstracción.

- *Desde un punto de vista Metodológico*

Las respuestas de los matemáticos (M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8) a las preguntas 4), 5) y 6) del cuestionario. Se ubican en la cuarta y última fase del proceso investigativo-matemático (Tall, 2013). Las numerosas apreciaciones, acciones y asunciones que narran los versionantes, presentan a esta actividad constructora de conocimiento matemáticos con un barniz, de diversas tonalidades y coloraciones que atienden procesos inductivos y deductivos, amplios criterios de verdad, encaminados y/o consustanciados con los niveles de razonamientos o pensamiento contemplados por su artífice.

Análisis de los Testimonios del Matemático Novato y Experto a la Pregunta 3

Reconociendo que en los análisis reseñados en los subtramos anteriores, la presencia de la representación es notoria, ilustraremos una exposición sintética de la respuesta de los versionantes a la pregunta 3.

En el caso de los matemáticos expertos exponen: que se sirven de la representación para transparentar las relaciones que ostentan las propiedades involucradas con los problemas que investiga (D_1); como medio que le permite esquematizar rutas de acción (D_2); como vehículo para trasladarse hacia otros contextos (D_2) y para el estudio y pensamiento de los objetos matemático (D_3).

En el caso de los matemáticos novatos exponen: que su apoyadura en la representación les permite visualizar la diferenciación de algunos puntos notables de un espacio topológico (M_1, M_4, M_7); como herramienta que funge como especie de puente que permite pasar del conocimiento intuitivo a la formalidad (M_2, M_5); como un mecanismos que posibilita el emerger de ideas, que les permite aclarar y recordar algunas cuestiones teóricas asociadas a la problemática (M_6); como andamiaje a la generalización (M_8).

Reflexiones Finales

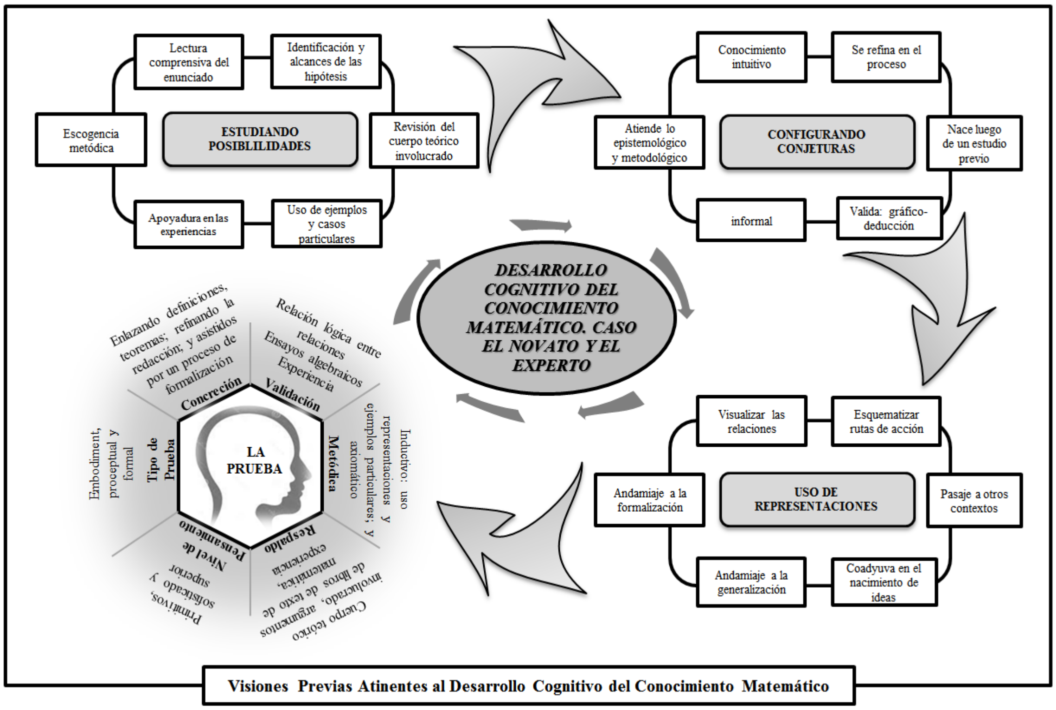
El conocimiento emergente que brota del análisis e interpretación realizado a las aportaciones suministradas en este nuestro primer contacto con los versionantes registró un entramado de ideas y asunciones que nos permitieron aproximarnos a las acciones epistémicas y cognitivas que activa el matemático al enrumbarse en un proceso investigativo-matemático. Acercamiento que desde un miramiento didáctico promueve el encuentro con los artesanos de la matemática con el propósito de alinear la cognición epistémica de los estudiantes en matemática con las del matemático profesional.

Hemos querido sintetizar -de entrada- los hallazgos resultantes de esta experiencia investigativa, desde una presentación gráfica (ver gráfica Nro. 1), que situadas en las fases que según Tall (2013) y en consonancia con los testimonios de los versionantes, ofrece un medio para esquematizar las ideas permitiéndonos transparentar las metas alcanzadas.

Observando el esquema gráfico sintetizamos lo siguiente:

- El papel estelar que le asigna el matemático al dominio del cuerpo teórico, en su praxis.
- Las investigaciones del matemático comportan un acompañamiento, respaldo e imbricación de evidencias *empíricas* (asistidas desde procedimientos algebraicos, consideración de ejemplos particulares, otros), autoritarias (según lo expresado en libros de textos especializados, lo convenido y validado por matemáticos de trayectoria), y deductivas (con apoyadura en el método axiomático).
- Los matemáticos-versionantes del estudio- se sirven de las representaciones -mentales, gráficas y simbólicas- como mecanismo para transparentar relaciones entre las propiedades involucradas en el problema matemático que investiga, para sintetizar su acción epistémica, para desplazarse hacia otros contextos, y como andamiaje para la formalización y generalización.
- Las acciones encaminadas por los matemáticos novatos y expertos, contemplan unos procesos evolutivos y refinados, que se sirve -inicialmente- de objetos embodiment y simbólicos, los cuales van adquiriendo sofisticados matices -con apoyadura en el lenguaje y el simbolismo- que los transforman en un objeto de orden superior (axiomático).

Gráfico N° 1: Recuento Ideográfico de las Acciones Epistémicas y Cognitiva del Matemático Novato y Experto



Fuente: Elaboración propia

- El pensamiento de los versionantes comporta los tres niveles sugeridos por Gray y Tall (2001), siendo estos: primitivo, sofisticado -en las primeras fases del proceso investigativo-, y superior -al cristalizar la prueba formal-.
- El proceso investigativo que activan y testifican los actores sociales, tiene manifestaciones iniciales en los mundos embodiment y de proceptos, asistidos por pruebas cuyo criterio de verdad reposa en la percepción de objetos corporificados -uso de dibujos o gráficos- o desde la manipulación de objetos mediante procedimientos algebraicos; encauzando -luego- un proceso de desarrollo que complejiza, refina y reviste los hallazgos solucionadores del problema -salpicados de creatividad e intuición- con un ropaje formalizado, desde una estilística semiformal.

Los matemáticos encuestados traslucen que la actividad epistémica que comprenden sus investigaciones, se nutre de un pensamiento que emerge y se configura, desde la experiencia y la manipulación mental, adheridos a sus esquemas conceptuales.

Referencias Bibliográficas

Alcock y Weber (2005). 'Proof validation in real analysis: Inferring and checking warrants'. *Journal of Mathematical Behavior* 24, 125–134.

Balacheff, N. (1982). Preuve et demostration en Mathamatiques au College. *Recherches in Didactique des Mathematiques*, 3 (3), 261-304.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147-176.

Bliss, J. Monk, M. y Ogborn (1983). Qualitative Data Analysis for Educational Research. Croom Helm. London.

Chi, M. T .H., Glaser, R. y Farr, M. J. (Eds.) (1988). The nature of expertise. Hillsdale: Erlbaum.

Dieudonné, J. (1989). *En Honor del Espíritu Humano, Las Matemáticas Hoy*. Editorial Alianza Universidad.

De Lorenzo, J. de (1971). *Introducción al Estilo Matemático*. Madrid: Tecnos.

De Lorenzo, J. de (1980). *El Método Axiomático y sus Creencias*. Madrid: Tecnos.

De Lorenzo, J. de (1998). *La matemática: de sus fundamentos y crisis*. Madrid: Tecnos.

Dreyfus, T. (2002). Advanced mathematical thinking process. *In David Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking. (pp. 25-41).* Dordriech, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1996). On Different Facets of Mathematical Thinking. In Sternberg, R. y Ben-Zeev, T. (eds.), *The Nature of Mathematical Thinking*. Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Fischbein, E. (2002). The Interaction Between The Formal, The Algorithmic, And The Intuitive Components In A Mathematical Activity. Didactics Of Mathematics as a Scientific Discipline, *Mathematics Education Library*, vol, 12, pp. 231-245.

Gray, E. y Tall, D. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics. Published in Proceedings of PME 25, Utrecht, pp. 65-72.

Goizueta, M. (2015). *Aspectos Epistemologicos de la Argumentacion en el Aula de Matemática.* Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Hadamard, J. (1945). *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*. New York: Dover Publications.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). 'Students' proof schemes: Results from exploratory studies'. *In E. Dubinsky, A. Schoenfeld and J. Kaput (Eds.), Research in Collegiate Mathematics Education, III, (234–283).* American Mathematical Society, Providence, RI.

Inglis, Mejia-Ramos, Simpson (2014) Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification. *Educ Stud Math* 66:3–21.

Larios, V. (2015) La construcción continua de la demostración como medio para enseñar y aprender a validar matemáticamente. XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática (XIV CIAEM-IACME). Chiapas, México.

Marmolejo, E. y Moreno, G. (2011) Argumentar-Conjeturar: Introducción a la Demostración. *Acta Latiniamericana de Matemática Educativa 24, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa* (CLAME). pp. 509-516.

Peinado, S. y Leal, S. (2013). Nivel de experticia, tipo de enunciado y resolución de problemas en estudiantes universitarios. *Revista Acción Pedagógica*, Nº 22, pp. 82 – 91.

Pozo, J. (1994). *La resolución de problemas de ciencias*. Madrid: CIDE-MEC.

Sánchez, J. y Valdivé, C. (2012). El número irracional: Una visión histórico-didáctica. Premisa 14(52), 1-17.

Sánchez, J. (2016). *Convicciones y Creencias del Matemático Experto: Aportes y Reflexiones para la Matemática Escolar*. Conferencia de Clausura del IX Congreso Venezolano de Educación Matemática (IX COVEM). Barquisimeto.

Sánchez, J. (2018). *Desarrollo Cognitivo del Conocimiento Matemático. Caso el Novato y el Experto*. Tesis doctoral no publicada. Doctorado Interinstitucional en Educación UCLA-UNEXPO-UPEL. Barquisimeto.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Metacognition, problem solving, and sense making in mathematics. *In D. Grouws (Ed.) Handbook of research on mathematical thinking and learning*. New York: Macmillan.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. *En: A. J. Bishop et al. (eds.), International Handbook of Mathematics Education*, pp. 827-876.

Tall, D. (2002). *Differing Modes of Proof and Belief* in Mathematics, International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand, 91–107. National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan.

Tall, D. (2004a). *Thinking Through Three Worlds of Mathematics.* Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway, 4, 281–288.

Tall, D. (2004b). Introducing Three Worlds of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 23 (3). 29–33.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically*. Cambridge: Cambridge University Press.

Tall, D. (2014). Making Sense of Mathematical Reasoning and Proof. M.N. Fried, T. Dreyfus (eds.), en *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground*. New York: Springer.

Valdivé, C. (2008). *Estudio de los esquemas conceptuales asociados a la noción de infinitesimal y su evolución en estudiantes de análisis matemático*. Tesis doctoral no publicada. Doctorado Interinstitucional en Educación UCLA-UNEXPO-UPEL. Barquisimeto.

Valdivé C. y Garbin, S. (2008). Estudio de los Esquemas Conceptuales Epistemológicos Asociados a la Evolución histórica de la Noción de Infinitesimal. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, Relime, 11(3): 413-450

Valdivé, C. y Garbin, S. (2010). Estudio de la evolución de los esquemas conceptuales previos asociados al infinitesimal: Caso de un estudiante clave. *Educare, Revista de Investigación y Postgrado de la UPEL*, 14(3), 3-31.

Valdivé, C. y Garbin, S. (2013). ¿Cómo Piensan los Estudiantes el Infinitesimal Antes de Iniciar un Curso de Análisis Matemático?. *Revista PARADIGMA*, VOL. XXXIV, Nº 1; pp. 117 – 144.

Valdivé, C. (2013). Estrategias Implementadas por los Matemáticos cuando Demuestran: Estudio de Caso. *Revista EDUCARE*, Volumen 17, Número 2, pp.4-26.

Weber y Alcock (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics* 56, 209–234.

Weber, K.; Inglis, M. y Mejia-Ramos (2014). How Mathematicians Obtain Conviction: Implications for Mathematics Instruction and Research on Epistemic Cognition. *Article in Educational Psychologist*. 49(1), pp. 1-74.

Weber, K. & Mejia-Ramos, J.P. (2011). How and why mathematicians read proofs: An exploratory study*. Educational Studies in Mathematics*, 76, 329-344.

Notas:

[1] Según Dreyfus (2002) la representación matemática activa los procesos de modelación, visualización, abstracción, entre otros.

[2] Para Dreyfus y Eisenberg (1996) el desarrollo del pensamiento matemático es consecuencia de la activación y combinación de diversos procesos cognitivos que llevan a su flexibilización, condición requerida por los matemáticos expertos en la solución de sus problemas de investigación.

[3] Para Valdivé (2013) la prueba como proceso cognitivo representa una problemática por cuanto involucra otros procesos de pensamiento (abstracción, análisis, conjeturación, entre otros) que se activan en la mente cuando se afronta una tarea de demostración.