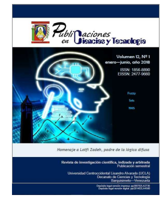
Publicaciones en Ciencias y Tecnología

Publicaciones en Ciencias y Tecnología. Vol. 12, N^{o}2, Julio-Diciembre (2018) 57–67



Artículo de investigación

Ordenamiento de números difusos usando centroides: Aspectos teóricos

Ordering fuzzy numbers using the centroid: Theoretical aspects

Soraya Carrasquel[a], David Coronado[a], Ricardo Monascal[a], Rosseline Rodríguez[a]

[a] *Universidad Simón Bolívar. Caracas, Venezuela.*

Recibido: 22-03-2018 Aceptado: 02-08-2018

Resumen

En el presente trabajo se exploran diferentes métodos de ordenamiento que se han propuesto para los números difusos. Además, se presenta una propuesta basada en la abscisa del centroide de cada número difuso. Se compara el ordenamiento propuesto con otro que también usa el cálculo del centroide mostrando las mejoras obtenidas. Este ordenamiento satisface, en la mayoría de los casos, la intuición por lo que es útil para consultas en bases de datos.

Palabras clave: Números difusos, ordenamiento, centroide, bases de datos, intuición.
Código UNESCO: 120304- Inteligencia Artificial

Abstract

In this work some ordering methods proposed for fuzzy numbers are explored. Furthermore, a proposal based on the abscissa of the centroid of each fuzzy number is presented. The proposed method is compared with another one that also uses the centroid calculation method, showing its improvements. This ordering method satisfies intuition in most cases, making it useful for database queries.

Key words: Fuzzy numbers, ordering, centroid, databases, intuition.
UNESCO Code: 120304- Artificial intelligence

1. Introducción

El concepto de número difuso fue introducido inicialmente por Zadeh [1] con el propósito de manipular valores numéricos aproximados. En muchos casos es deseable establecer un orden en un conjunto de números difusos. Se han propuesto diversos ordenamientos [2, 3]. Esta variedad se debe a que no existe un método que dé un resultado satisfactorio a todo problema planteado de ordenamiento. La mayoría de los métodos presentados hasta el momento son sólo órdenes parciales, otros métodos no están de acuerdo con la intuición humana y otros no pueden comparar números difusos con números precisos.

Impresa: ISSN 1856-8890. Dep. Legal pp200702LA2730. Digital: ISSN 2477-9660 Dep. Legal ppi201402LA4590. Licencia CC BY-NC-SA

Email addresses: scarrasquel@usb.ve (Soraya Carrasquel), dcoronado@usb.ve (David Coronado), rmonascal@usb.ve (Ricardo Monascal), crodrig@usb.ve (Rosseline Rodríguez)

Canfora y Troiano [4] desisten de la idea de crear un ordenamiento universal. Asumen que cada permutación de un conjunto de números difusos es un ordenamiento del tipo directo, asociado con un grado de posibilidad, por lo que resulta en un ordenamiento difuso. El caso de que este grado sea cero indica que ese ordenamiento es imposible.

Dada las opiniones diversas y el gran número de ordenamientos propuestos hasta ahora, sin éxito en decidir cuál es el mejor, se plantea como objetivo de este trabajo proponer un ordenamiento que satisfaga la intuición sugerida por los autores para usuarios de bases de datos. La propuesta se basa en el cálculo del centroide mediante la integral de Riemann para producir un ordenamiento indirecto según la clasificación de Mitchell y Schaefer [5].

Este trabajo está estructurado como sigue: en la Sección 2 se exponen los conceptos teóricos que lo sustentan. En la Sección 3 se muestran algunos antecedentes al problema planteado. La Sección 4, se plantea y analiza la propuesta de ordenamiento: uso del centroide. En la Sección 5 se realiza una comparación de esta propuesta con el método de Rao y Shankar. Finalmente, en la Sección 6, se muestran las conclusiones y los trabajos futuros.

2. Marco teórico

En esta sección se definen los principales conceptos que sustentan este trabajo: conjuntos difusos, distribuciones de posibilidad, números difusos, orden y tipos de ordenamientos.

2.1. Conjuntos difusos

Los *conjuntos difusos* [6] se caracterizan por una función de membresía μ, cuyo rango está en el intervalo real $[0, 1]$, cuánto más se acerca a 1 el grado de membresía de un elemento, éste está más posiblemente (o certeramente) incluido en el conjunto. Así, 0 es la medida de completa exclusión y 1 la de completa inclusión. Al conjunto formado por los elementos parcialmente incluidos se le conoce como el *borde* del conjunto difuso, el conjunto de los elementos completamente incluidos se les llama el *núcleo*, y los elementos que no están completamente excluidos conforman el *soporte*. Formalmente, si F es un conjunto difuso con función de membresía $\mu_F(x)$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\text{borde}(F) &= \{x \in X | 0 < \mu_F(x) < 1\} \\
\text{núcleo}(F) &= \{x \in X | \mu_F(x) = 1\} \\
\text{soporte}(F) &= \{x \in X | \mu_F(x) > 0\}
\end{aligned}$$

2.2. Números difusos

Un número difuso se define como un conjunto difuso con soporte en los números reales y además satisface que su función de membresía es normalizada, en el sentido de que al menos un valor está totalmente contenido, convexa, semicontinua superior y su soporte está acotado [7]. Los números difusos pueden ser representados de diferentes formas. En este trabajo se usarán las dos formas más comunes: definición por extensión y definición trapezoidal. En el caso en que un número difuso aproxima un valor entero, se puede usar una definición por extensión. Un *número difuso A definido por extensión* se representa como un conjunto de pares de la forma $A = \{\mu_A(x_1)/x_1, \mu_A(x_2)/x_2, \ldots, \mu_A(x_n)/x_n\}$.

Una representación de número difuso muy usada es la función de membresía trapezoidal. En este caso, se especifica con una cuaterna (x_1, x_2, x_3, x_4) de elementos del dominio $\mathbb{R}$, ordenados por $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ que definen los vértices $\{ (x_1, 0), (x_2, 1), (x_3, 1), (x_4, 0) \}$ de un trapecio, tal como se puede ver en la Figura 1.

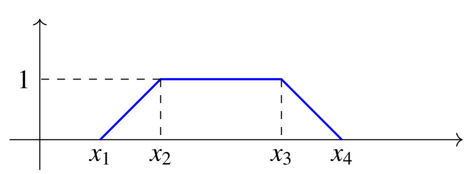


Figura 1: Trapecio General.

2.3. Orden

El orden aparece en todas las áreas relacionadas a la matemática y la informática. Dado un conjunto, en muchos casos es deseable establecer una relación de precedencia entre los elementos de dicho conjunto. Se puede distinguir dos tipos de conjuntos ordenados: aquéllos en los cuales se puede establecer una relación de precedencia entre algunos de sus elementos, llamados *parcialmente ordenados*; y aquéllos en los que se puede establecer dicha relación para todos sus elementos, llamados *totalmente ordenados*.

Definición 2.1. Dado un conjunto X y una relación R sobre X, el par $\langle X, R\rangle$ se llama un conjunto *parcialmente ordenado* si R es una relación: *reflexiva*: $(\forall x \in X)\ xRx$; *antisimétrica*: $(\forall x, y \in X)\ xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$; y *transitiva*: $(\forall x, y, z \in X)\ xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$. Un conjunto *totalmente ordenado* X es un conjunto parcialmente ordenado en el que todo par de elementos x, y de X son comparables, es decir $(\forall x, y \in X)(xRy \vee yRx)$.

3. Antecedentes

En las últimas décadas se han propuesto numerosos métodos para el ordenamiento de números difusos [3]. Según Buckley y Eslami [8] hay más de 100 publicaciones sobre ordenamiento de números difusos. Ellos clasifican los órdenes en débiles y fuertes. En el caso de un orden fuerte, cualquier conjunto de números difusos tiene un único orden, por lo tanto se puede hablar del mínimo (máximo), con ese orden; lo que no ocurre con los ordenes débiles.

Yuan [9] sostiene que no existe un método único de ordenamiento que satisfaga todas las necesidades. Según Nasseri et al. [10] un método para ordenar números difusos es asignarle a cada número difuso un valor real y posteriormente, ordenarlos usando este número. Singh [3] presentó un resumen con algunos métodos y destaca que no basta con considerar un solo criterio para ordenar los números difusos.

Existen varias clasificaciones de los procedimientos de ordenamiento de números difusos. Entre ellas destaca la propuesta de Mitchell y Schaefer [5] que extiende la idea de ordenar de forma directa e indirecta aplicada a números precisos en las estadísticas. Un ordenamiento se dice *directo* si es el resultado de ordenar de acuerdo a sus propios valores. El ordenamiento se llama *indirecto* si es el resultado de ordenar el conjunto, según un segundo conjunto de números ordenable, usualmente, números reales.

Dentro de los ordenamientos indirectos, en [10], se presenta un método para ordenar números difusos que consiste en asignarle a cada número difuso un valor real y luego ordenarlos naturalmente de acuerdo con este número. Yager [11] define un máximo, luego ordena de acuerdo a la distancia de Hamming al máximo, siendo el mayor aquel con menor distancia. Chen [12] afirma que esta solución no es intuitiva en algunos casos. Kerre [13] redefine el máximo del método de Yager que se adapta a más casos. Chen [12] afirma que la propuesta de Kerre también resulta no intuitiva en varios casos.

Rao y Shankar [14] establecieron un procedimiento que genera un ordenamiento indirecto: dado un número difuso de forma trapezoidal, primero lo dividen en dos triángulos y un rectángulo, segundo calculan el centroide de cada figura, tercero encuentran el circuncentro del triángulo formado por los tres centroides, finalmente, ordenan de acuerdo a la abscisa de este punto. Aunque este método resulta de fácil implementación y se puede usar incluso, con números precisos, pues el mismo número sería el centroide, tiene la desventaja que se basa en la definición trapezoidal de números difusos por lo que no puede ser usada para números difusos definidos por extensión.

Luego de la exposición de estas propuestas diversas de ordenamiento para los números difusos, se puede concluir que la elección de una de ellas depende del dominio de aplicación donde se vaya a utilizar.

En el caso particular de las bases de datos que posean atributos cuyos valores pueden ser números difusos, la norma es la preferencia del usuario. Generalmente, esta preferencia está dada por la percepción que tiene el usuario de la situación que observa, lo que se puede entender como intuición. Por esta razón, aquí se propone un método que usa una medida de intuición para comparar dos números difusos.

En esta dirección, el ordenamiento propuesto en este trabajo, es un orden indirecto que usa el cálculo de la abscisa del centroide de los números difusos en sus dos posibles definiciones. Luego se comparan los números difusos en base al resultado de este cálculo. La ventaja sobre el método anterior [14] es que permite comparar definiciones trapezoidales o por extensión de números difusos, o también con números precisos.

4. Propuesta de ordenamiento

Cuando se comparan las gráficas de dos números difusos, la intuición parece indicar que si la gráfica del primer número está desplazada a la izquierda del segundo número se puede concluir que el primero es menor que el segundo.

Una medida de este desplazamiento entre gráficas se puede obtener a través de la abscisa del centroide. Por tal razón, la propuesta de ordenamiento aquí presentada se basa en calcular la abscisa del centroide del número difuso y posteriormente ordenar usando el valor obtenido. En el caso de un número difuso definido por extensión, $A =$

$\{ \mu_A(x_1)/x_1, \mu_A(x_2)/x_2, \ldots, \mu_A(x_n)/x_n \}$, se puede pensar en una barra rígida donde se coloca, en la posición x_i una masa de peso $\mu_A(x_i)$, luego se calcula la suma ponderada y se divide entre el peso total del sistema, así se obtiene el centroide. En el caso de una definición trapezoidal se usa definición equivalente usando la integral de Riemann para obtener la abscisa del centroide, asumiendo a la función de membresía como la densidad de masa del sistema. Así, se establecen comparaciones entre números difusos presentados de diversas formas e incluso, con números precisos.

4.1. Ordenamiento basado en el Centroide

Muchas estructuras y sistemas mecánicos, entre otros, actúan como si sus masas estuvieran concentrados en un solo punto, llamado *centro de masa*. La localización de este punto depende de dos factores principales, la forma de la estructura y el material con el cual está construida. En el caso en que la estructura posea densidad de masa constante (esté hecho de un único material) este centro de masa se denomina *centroide*. El primer modelo que se presenta, el cual se aplica a números difusos dados por extensión $A = \{ \mu_1/x_1, \mu_2/x_2, \ldots, \mu_n/x_n \}$, considera que se tiene un punto de equilibrio en el origen de coordenadas y se colocan las masas $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ en las posiciones $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectivamente. Sobre este sistema se definen los momentos de masa, la masa y el centro de masa a continuación.

Definición 4.1. Si se tienen las masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ en un eje rígido horizontal x con un punto de apoyo en el origen y si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ representan su ubicación sobre la recta real, entonces el momento de masa M y la masa m del sistema vienen dado por [15]:

$$M = \sum_{k=1}^{n} x_k m_k \qquad m = \sum_{k=1}^{n} m_k$$

De donde se concluye que la abscisa del centroide es $\overline{x} = \frac{M}{m}$.

Aplicando la definición anterior a los números difusos dados por extensión considerando el valor de su función de pertenencia como su masa, se obtiene el centroide. Es decir, si A es un número difuso dado por extensión como $A = \{ \mu_1/x_1, \mu_2/x_2, \ldots, \mu_n/x_n \}$. Entonces su momento de masa M, su masa m y la abscisa de su centroide $\overline{x}_A$ estan dados por:

$$M = \sum_{k=1}^{n} x_k \mu_k \qquad m = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \qquad \overline{x}_A = \frac{M}{m}. \tag{4.1}$$

En el caso de objetos bidimensionales o láminas planas R, la dependencia del material se mide a través de su densidad de masa ρ, unidad de medida que indica el peso de cada unidad de área. Si la lámina esta construida por diversos materiales o con distintas concentraciones del mismo, la densidad es una función que depende de las coordenadas (x, y) de la zona en estudio. Así para calcular la masa m de una lámina, se usan *sumas de Riemann*: se cuadricula la lámina, se toma un punto cualquiera en cada cuadro y se asume que, en ese cuadro, la densidad es constante, por lo que el cuadro tendrá peso $\rho(x, y)$ multiplicado por el diferencial del área ΔA, luego se suman las masas de los cuadros y finalmente, se toma el límite cuando $\Delta A \to 0$. Es decir,

$$m = \iint_R \rho(x, y) dA.$$

A continuación, se formaliza esta definición y la de momentos de masa, y cómo usar éstas para encontrar las coordenadas del centro de masa.

Definición 4.2. Sea $\rho = \rho(x, y)$ una función de densidad continua sobre la lámina plana R. En [15] se definen los *momentos de masa* respecto de los ejes x e y, respectivamente, como

$$M_x = \iint_R y \cdot \rho(x, y) dA \qquad M_y = \iint_R x \cdot \rho(x, y) dA$$

Si la masa de la lámina es m, el *centro de masas* es $(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m} \right)$.
Si R representa una región plana, el punto $(\overline{x}, \overline{y})$ se llama el *centro de masa* de la región. En los casos en los cuales la densidad $\rho(x, y)$ sea constante, la misma se cancela tanto en el numerador y como en el denominador en el cálculo de $(\overline{x}, \overline{y})$. En estos casos, este punto se llama *centroide* de la región, el cual depende de la forma de la región mas no del material con el cual está construido.

Con estas definiciones se puede decir que un número difuso A es menor que un número difuso B si la abscisa del centroide de A es menor que la abscisa del centroide de B.

Un caso particular es el de los números precisos $A = \{ x \}$. En este caso, tenemos una sola masa de peso 1 ubicada en el punto x, por lo tanto, la abscisa de su centroide es x.

A continuación se presenta el cálculo de la abscisa del centroide para un trapecio general.

Proposición 4.1. Sea T el trapecio que sirve de marco referencial a un número difuso A cuya función de membresía está definida por

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ (x - x_1)/(x_2 - x_1) & \text{si } x_1 \leq x < x_2 \\ 1 & \text{si } x_2 \leq x \leq x_3 \\ (x_4 - x)/(x_4 - x_3) & \text{si } x_3 < x \leq x_4 \\ 0 & \text{si } x_4 < x \end{cases}$$

Entonces la abscisa $\overline{x}$ del centroide del trapecio T viene dado por:

$$\overline{x} = \frac{1}{3}\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \frac{x_1x_2 - x_3x_4}{x_4 - x_1 + x_3 - x_2}\right) \tag{4.2}$$

Demostración: De acuerdo con la Definición 4.2, primero, se calculan los momentos de masa. Para ello, se aplica la propiedad aditiva de las integrales sobre regiones, descomponiendo el trapecio en dos triángulos y un rectángulo. Se integra sobre cada región y luego, se suman los totales obtenidos. La gráfica de la descomposición del trapecio se muestra en la Figura 2.

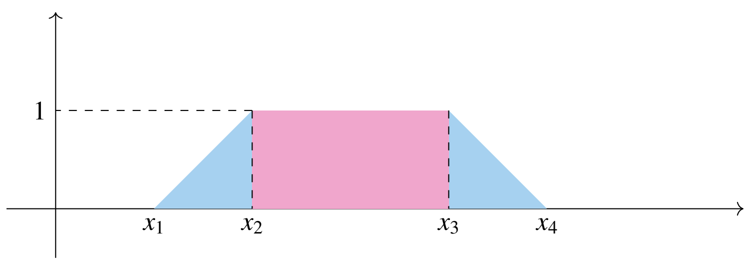


Figura 2: Corte del trapecio en dos triángulos (azules) y un rectángulo (rosado).

La región del primer triángulo está dada por T_1: $x_1 \leq x \leq x_2$, $0 \leq y \leq (x - x_1)/(x_2 - x_1)$. Integrando sobre esta región, y asumiendo la densidad constante, $\rho(x, y) = \rho$, se obtiene

$$\begin{aligned} M_y(T_1) &= \iint_{T_1} x \cdot \rho(x, y)dA = \rho \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{(x-x_1)/(x_2-x_1)} xdydx \\ &= \frac{\rho}{6}\left[2x_2^2 - x_1x_2 - x_1^2\right] \end{aligned}$$

La región rectangular está dada por $R : x_2 \leq x \leq x_3$, $0 \leq y \leq 1$. Integrando sobre esta región quedaría:

$$M_y(R) = \iint_R x\rho dA = \rho \int_{x_2}^{x_3} \int_0^1 xdydx$$

El segundo triángulo define la región T_2: $x_3 \leq x \leq x_4$ y $0 \leq y \leq (x_4 - x)/(x_4 - x_3)$. Integrando sobre esta región:

$$\begin{aligned} M_y(T_2) &= \iint_{T_2} x\rho dA = \rho \int_{x_3}^{x_4} \int_0^{(x_4-x)/(x_4-x_3)} xdydx \\ &= \frac{\rho}{6}\left[x_4^2 + x_3x_4 - 2x_3^2\right] \end{aligned}$$

Sumando los resultados obtenidos se tiene el momento de masa:

$$\begin{aligned} M_y &= M_y(T_1) + M_y(R) + M_y(T_2) \\ &= \frac{\rho}{6}\left[2x_2^2 - x_1x_2 - x_1^2\right] + \frac{\rho}{2}\left[x_3^2 - x_2^2\right] + \frac{\rho}{6}\left[x_4^2 + x_3x_4 - 2x_3^2\right] \\ &= \frac{\rho}{6}[x_3^2 + x_4^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2 + x_3x_4] \end{aligned}$$

La masa m, viene dada en este caso, por la densidad multiplicada por el área. Esta área se calcula usando la fórmula para el área A de un trapecio con base mayor B, base menor b y altura h: $A = \frac{B+b}{2}h$ donde $B = x_4 - x_1$, $b = x_3 - x_2$ y $h = 1$:

$$m = \rho\frac{x_4 - x_1 + x_3 - x_2}{2} = \frac{\rho}{2}(x_4 - x_1 + x_3 - x_2)$$

Por lo tanto, la abscisa del centroide es:

$$\begin{aligned} \overline{x} = \frac{M_y}{m} &= \frac{\frac{\rho}{6}[x_3^2 + x_4^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2 + x_3x_4]}{\frac{\rho}{2}(x_4 - x_1 + x_3 - x_2)} \\ &= \frac{1}{3}\frac{x_3^2 + x_4^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2 + x_3x_4}{x_4 - x_1 + x_3 - x_2} \end{aligned}$$

Y al efectuar la división, se obtiene el resultado esperado

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{3}\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \frac{x_1x_2 - x_3x_4}{x_4 - x_1 + x_3 - x_2}\right) \qquad \square$$

Si se consideran los números difusos trapezoidales como láminas planas y los números difusos por extensión como masas en un eje horizontal, estas estructuras se comportaran como una sola masa ubicada sobre la abscisa del centroide, por lo tanto, se ordenan de acuerdo a ésta. Es de notar que dos números difusos pueden poseer la misma abscisa sin ser precisamente iguales, pero como estamos considerando al número difuso como un sola masa ubicada en un punto, diremos en este caso que los números difusos son iguales.

Definición 4.3 (Ordenamiento basado en la abscisa del centroide). Sean dos números difusos A y B. Sean $\overline{A}$ y $\overline{B}$ las respectivas abscisas de sus centroides, se dice que $A \leq_C B$ si y solo si $\overline{A} \leq \overline{B}$. Además, si $\overline{A} = \overline{B}$ se dice que $A =_C B$.

La relación definida anteriormente es, en efecto, una relación de orden. Así lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 4.2. El *ordenamiento basado en la abscisa del centroide* $\leq_C$ es una relación de orden.

Demostración: Sean A, B y C números difusos con abscisas de centroides $\overline{A}$, $\overline{B}$ y $\overline{C}$ respectivamente.

Reflexividad Es claro que $A \leq_C A$ ya que $\overline{A} \leq \overline{A}$.

Antisimetría Si $A \leq_C B$ y $B \leq_C A$ es porque $\overline{A} \leq \overline{B}$ y $\overline{B} \leq \overline{A}$, así que $\overline{A} = \overline{B}$ y por lo tanto $A =_C B$.

Transitividad Si $A \leq_C B$ y $B \leq_C C$ se tiene que $\overline{A} \leq \overline{B}$ y $\overline{B} \leq \overline{C}$, por lo tanto $\overline{A} \leq \overline{C}$ y así $A \leq_C C$. $\square$

4.2. Ejemplos de aplicación

A continuación, se aplica la definición del ordenamiento a tres ejemplos para observar su uso. El primer ejemplo corresponde al ordenamiento de un par de números difusos, ambos dados por extensión. El segundo ejemplo, corresponde al ordenamiento de dos números difusos dados trapezoidalmente. El tercer ejemplo, corresponde a la comparación entre un número difuso dado por extensión y un número difuso dado trapezoidalmente.

Ejemplo 4.1. Dados los números difusos por extensión $A = \{,5/1, 1/2, ,8/3, ,5/4\}$ y $B = \{,5/3, ,8/4, 1/5, ,5/6\}$, se espera como resultado intuitivo al aplicar la definición basada en centroide que $A \leq_C B$. Se usará, para calcular la abscisa del centroide de cada número, las fórmulas (4.1) de la Definición 4.1. El subíndice identifica el número difuso al que se refiere la fórmula.

$$
\begin{aligned}
M_A &= 0{,}5 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0{,}8 \cdot 3 + 0{,}5 \cdot 4 \Rightarrow M_A = 6{,}9 \\
m_A &= 0{,}5 + 1 + 0{,}8 + ,5 \Rightarrow m_A = 2{,}8 \\
\overline{A} &= \frac{6{,}9}{2{,}8} \Rightarrow \boxed{\overline{A} = 2{,}464} \\
M_B &= 0{,}5 \cdot 3 + 0{,}8 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 0{,}5 \cdot 6 \Rightarrow M_B = 12{,}7 \\
m_B &= 0{,}5 + 0{,}8 + 1 + 0{,}5 \Rightarrow m_A = 2{,}8 \\
\overline{B} &= \frac{12{,}7}{2{,}8} \Rightarrow \boxed{\overline{B} = 4{,}535}
\end{aligned}
$$

Como $\overline{A} \leq \overline{B}$ se tiene que $\boxed{A \leq_C B}$. Una gráfica de los números difusos comparados con las abscisas de sus centroides, marcadas con círculos sin relleno, se observa en la Figura 3.

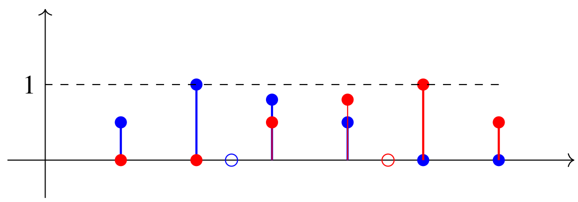


Figura 3: Representación gráfica de los números difusos por extensión A (azul) y B (rojo) comparados con sus abscisas de centroides marcadas con círculos (sin relleno) del color respectivo

Ejemplo 4.2. Dados los números difusos trapezoidales $A = (2, 4, 6, 8)$ y $B = (1, 9, 11, 13)$, se espera como resultado intuitivo al aplicar la definición basada en centroide que $A \leq_C B$. En ambos casos se usará la fórmula (4.2).

$$
\begin{aligned}
\overline{A} &= \frac{1}{3}\left(2 + 4 + 6 + 8 + \frac{8 - 48}{8 - 2 + 6 - 4}\right) \Rightarrow \boxed{\overline{A} = 5}. \\
\overline{B} &= \frac{1}{3}\left(1 + 9 + 11 + 13 + \frac{9 - 143}{13 - 1 + 11 - 9}\right) \Rightarrow \boxed{\overline{B} = 8{,}142}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, como se cumple que $\overline{A} \leq \overline{B}$, se concluye que $\boxed{A \leq_C B}$. La Figura 4, muestra la gráfica de los trapecios con sus respectivas abscisas.

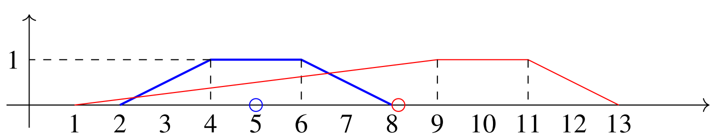


Figura 4: Representación gráfica de los números difusos trapezoidales A (azul) y B (rojo) comparados con sus abscisas de centroides marcadas con círculos (sin relleno) del color respectivo.

Ejemplo 4.3. Dados los números difusos A con definición trapezoidal, $A = (1, 2, 4, 5)$ y B por extensión, $B = \{\ 1/2, 1/3, 1/4, ,5/5\ \}$, se espera como resultado intuitivo al aplicar la definición basada en centroide que $A \leq_C B$. Se usará para calcular $\overline{A}$ la fórmula (4.2), y para calcular $\overline{B}$ las fórmulas (4.1).

$$
\begin{aligned}
\overline{A} &= \frac{1}{3}\left(1 + 2 + 4 + 5 + \frac{1 \cdot 2 - 4 \cdot 5}{5 - 1 + 4 - 2}\right) \Rightarrow \boxed{\overline{A} = 3} \\
M_B &= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + ,5 \cdot 5 \Rightarrow M_B = 11{,}5 \\
m_B &= 1 + 1 + 1 + ,5 \Rightarrow m_B = 3{,}5 \\
\overline{B} &= \frac{11{,}5}{3{,}5} \Rightarrow \boxed{\overline{B} = 3{,}285}
\end{aligned}
$$

Como $\overline{A} \leq \overline{B}$, se concluye que $A \leq_C B$. La comparación se muestra en la Figura 5.

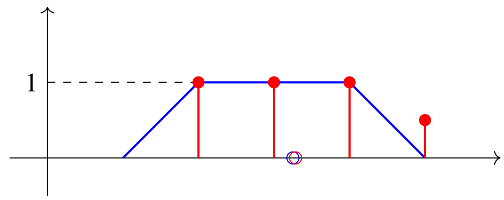


Figura 5: Representación gráfica de los números difusos A (azul) y B (rojo) comparados con sus abscisas de centroides marcadas con círculos (sin relleno) del color respectivo.

Estos casos ponen en evidencia la aplicabilidad del método aquí propuesto. Sin embargo, es conveniente un mayor estudio de casos para mostrar la satisfacción de la intuición por parte del método. Sin embargo, no daría espacio en este artículo para ello, por lo que se presentará en otro trabajo como segunda parte de este.

5. Comparación con el método propuesto por Rao y Shankar [14]

El método método propuesto por Rao y Shankar [14] consiste en un ordenamiento $\leq_{RS}$, que toma un número difuso trapezoidal $A = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ al cual se le aplica el siguiente algoritmo:

Paso 1. Se divide en dos triángulos y un rectángulo, como en la Figura 2.

Paso 2. Se calcula el centroide de triángulo y del rectángulo.

Paso 3. Se calcula el circuncentro del triángulo formado por los tres centroides encontrados en el paso anterior.

Paso 4. Finalmente, se ordena de acuerdo a la abscisa de este punto.

La siguiente proposición muestra como calcular esta abscisa.

Proposición 5.1. Sea T el trapecio que sirve de marco referencial a un número difuso A cuya función de membresía está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ (x - x_1)/(x_2 - x_1) & \text{si } x_1 \leq x < x_2 \\ 1 & \text{si } x_2 \leq x \leq x_3 \\ (x_4 - x)/(x_4 - x_3) & \text{si } x_3 < x \leq x_4 \\ 0 & \text{si } x_4 < x \end{cases}$$

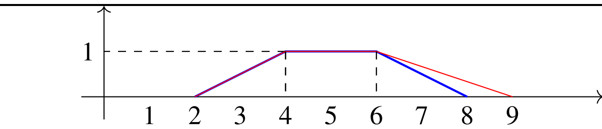
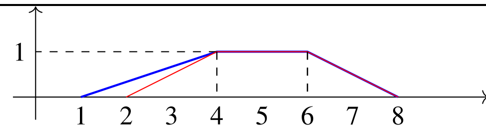
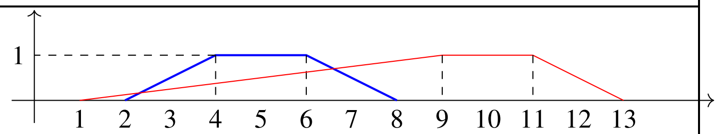
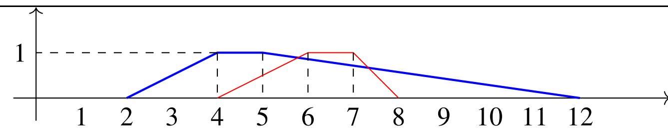
La abscisa del circuncentro hallado usando el método de [14], $\overline{A}_x$, viene dada por

$$\overline{A}_x = \frac{x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4}{6}. \tag{5.1}$$

La demostración de esta proposición se detalla en [14], para el lector interesado. A continuación se muestra un ejemplo donde se ordena con este método y se compara el resultado al ordenar con el método de la abscisa del centroide, propuesto en este trabajo.

Ejemplo 5.1. En el Cuadro 1, se muestran cuatro (4) pares de números difusos dados trapezoidalmente y su respectiva representación gráfica.

Cuadro 1: Pares de números difusos dados trapezoidalmente a ser comparados.

	A	B	Representación gráfica
1	$(2,4,6,8)$	$(2,4,6,9)$	
2	$(1,4,6,8)$	$(2,4,6,8)$	
3	$(2,4,6,8)$	$(1,9,11,13)$	
4	$(2,4,5,12)$	$(4,6,7,8)$	

El Cuadro 2 muestra los resultados obtenidos al aplicar el método basado en la abscisa del centroide, propuesto en este trabajo, y al aplicar el método de Rao y Shankar. En dicho cuadro se puede observar que el resultado obtenido en todos los casos es, esencialmente, el mismo, por lo que se puede concluir que el método de ordenamiento propuesto en este artículo, en el caso de números difusos definidos por una forma trapezoidal, genera los mismos ordenamientos que el método presentado en [14]. Esto muestra la pertinencia del método aquí propuesto. Más aún, vale la pena destacar que el método de Rao y Shankar no considera números difusos por extensión, lo cual sería una ventaja del nuevo método,

Cuadro 2: Resultado de la comparación de pares de números difusos definidos en forma trapezoidal.

Ejemplo 5.1	Centroide			Rao-Shankar		
	$\overline{A}$	$\overline{B}$	Conclusión	$\overline{A}$	$\overline{B}$	Conclusión
1	5	5.29	$A \leq_C B$	5	5.1	$A \leq_{RS} B$
2	4.7	5	$A \leq_C B$	4.8	5	$A \leq_{RS} B$
3	5	8.14	$A \leq_C B$	5	9	$A \leq_{RS} B$
4	6.09	6.2	$A \leq_C B$	3.3	6.3	$A \leq_{RS} B$

6. Conclusiones y trabajos futuros

Con el propósito de poder dar una semántica adecuada a consultas en bases de datos en presencia de atributos cuyos valores son números difusos, se estudiaron propuestas de ordenamiento de números difusos, puesto que el ordenar datos suele ser una actividad recurrente en la presentación de resultados de consultas en bases de datos. Se concluye que las propuestas son diversas por lo que el mejor camino a seguir es tomar aquella que se adapte al dominio de aplicación.

En este trabajo se presenta, con rigor formal, una nueva propuesta de ordenamiento que considera la abscisa del centroide. El surgimiento de esta propuesta se debe a que al analizar la gráfica de diferentes números difusos, la intuición parece indicar que si la gráfica del primer número a comparar está desplazada a la izquierda del segundo número es porque el primero es menor que el segundo. La abscisa del centroide es una buena medida de este desplazamiento.

En ese sentido, se propone un ordenamiento indirecto que calcula la abscisa del centroide de cada número difuso, obteniendo el resultado de la comparación en base al valor real obtenido. Se puede concluir que el ordenamiento *basado en la abscisa del centroide* es un *buen* ordenamiento ya que el resultado obtenido al aplicarlo es el esperado intuitivamente por los autores. Además, la propuesta aquí presentada aventaja a otras propuestas en el sentido que permite comparar números difusos independientemente que su representación sea por extensión, o trapezoidal, incluyendo el caso de un solo punto (número preciso). Particularmente la propuesta de Rao y Shankar [14] que también se basa en el cálculo de centroides, sólo permite comparar números difusos con representación trapezoidal.

También se realizó una comparación entre la propuesta aquí presentada y la de Rao Shankar, basada en el análisis de algunos casos de estudio. Del análisis se concluye que ambos métodos obtienen los mismos resultados para el caso de los números representados de forma trapezoidal. Por lo que para este caso ambos métodos son equivalentes en cuanto a la intuición esperada, así que, se podría usar cualquiera de los dos. Dado que el método propuesto en este trabajo es aplicable también para los números difusos por extensión y para los números precisos, se recomienda éste método sobre el Rao-Shankar por ser más general.

Es de resaltar que en estos ejemplos se está ordenando números difusos de forma abstracta, se plantea como trabajos a futuro, contextualizarlos a problemas particulares, en especial de bases de datos difusas, para así estudiar su pertinencia al compararlo con otros tipos de ordenamiento.

En este trabajo se comparó el resultado obtenido por el método del centroide del número difuso, con el método del centroide del triángulo cuyos vértices son los centroides de los triángulos y el rectángulo formados al descomponer el trapecio. Como trabajo a futuro, se propone comparar con otros métodos, en especial, con alguno que permita no solo comparar los números difusos dados trapezoidalmente sino dados por extensión.

7. Agradecimientos

Este trabajo es resultado del Proyecto de Grupo "*Desafíos del Modelo Relacional Difuso*" el cual cuenta con el apoyo de la Universidad Nacional Experimental Politécnica "Antonio José de Sucre"(UNEXPO), Vicerrectorado de Barquisimeto, coordinado por los profesores Carlos Lameda y Leonid Tineo, agradecemos a este último sus valiosos aportes en este trabajo. "*Por la fé entendemos haber sido constituido el universo por la palabra de Dios, de modo que lo que se ve fue hecho de lo que no se veía*" (Hebreos 11:3).

Referencias

[1] L.A.Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—I. *Information sciences*, 8(3):199–249, 1975.
[2] S. Abbasband; B. Asady. Ranking of fuzzy numbers by sign distance. *Information Sciences*, 176(16):2405 – 2416, 2006.
[3] Pushpinder Singh. A novel method for ranking generalized fuzzy numbers. *JISE J. Inf. Sci. Eng.*, 31(4):1373–1385, 2015.
[4] G. Canfora; L. Troiano. Fuzzy ordering of fuzzy numbers. In *Fuzzy Systems, 2004. Proceedings. 2004 IEEE International Conference on*, volume 2, pages 669–674, July 2004.
[5] H. B. Mitchell; P. A. Schaefer. On ordering fuzzy numbers. *International Journal of Intelligent Systems*, 15(11):981–993, 2000.
[6] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information control*, 8:338–353, 1965.
[7] J. Galindo; A. Urrutia; M. Piattini. Fuzzy databases: Modeling, design and implementation. *Idea Group Publishing Hershey, USA*, 2006.
[8] J. Buckley; E. Eslami. Fuzzy ordering of fuzzy numbers. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 12(1):105–114, 2004. OnLine.
[9] Y. Yuan. Criteria for evaluating fuzzy ranking methods. *Fuzzy Sets and Systems*, 43(2):139–157, 1991.
[10] S. H. Nasseri; F. Taleshian; Z. Alizadeh; J. Vahidi. A new method for ordering *LR* fuzzy number. *TJMCS*, 4(3):283–294, 2012.
[11] R.R.Yager. On choosing between fuzzy subsets. *Kybernetes*, 9(2):151–154, 1980.
[12] S-J Chen; C-L Hwang. Fuzzy multiple atribute decision making. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, pages 289–486, 1992.
[13] E. Kerre. The use of fuzzy set theory in electrocardiological diagnostics. *Aproximate Reasoning in Decision Analysis*, pages 277–282, 1982. M. Gupta and E. Sanchez. Eds.
[14] N. Ravi Rao, P. Phani Bushan; Shankar. Ranking fuzzy numbers with a distance method using circumcenter of centroids and an index of modality. *Adv. Fuzzy Syst.*, 2011.
[15] G.B. Thomas; M.D. Maurice. *Cálculo: una variable*. Pearson Educación, 12a edición edition, 2010.

Sobre los autores

Soraya Carrasquel
Licenciado en Matemáticas, Magister Scientiarum en Matemáticas. Profesora e Investigadora en la Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela. Adscrita al Departamento de Computación y Tecnología de la Información.
Correo: scarrasquel@usb.ve - ORCID

David Coronado
Licenciado en Matemáticas, Magister Scientiarum en Matemáticas, PhD. en Matemáticas. Profesor e Investigador en la Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela. Adscrito al Departamento de Computación y Tecnología de la Información. Correo: dcoronado@usb.ve - ORCID

Ricardo Monascal
Ingeniero en Computación, Magister Scientiarum en Computación. Profesor e Investigador en la Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela. Adscrito al Departamento de Computación y Tecnología de la Información.
Correo: rmonascal@usb.ve - ORCID

Rosseline Rodríguez
Ingeniero en Computación. Magister Scientiarum en Computación. Profesora e investigadora en la Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela. Adscrita al Departamento de Computación y Tecnología de la Información.
Correo: crodrig@usb.ve - ORCID