CÁLCULO DEL VECTOR DE PREFERENCIAS DEL PROCESO ANALÍTICO JERÁRQUICO BAJO EL ENFOQUE DE OPTIMIZACIÓN

Hugo Lara * Hecmy Osorio **

Resumen

El proceso analítico jerárquico es una herramienta lider entre los modelos de decisión multicriterio. Sin embargo el método de vectores propios de Saaty [7] para encontrar el vector de preferencias ha sido muy criticado. Como alternativa proponemos un nuevo método de cálculo del vector de prioridades basado en la proyección de la matriz de prioridades en el conjunto de las matrices consistentes. Demostramos que nuestro método está bién definido, y presentamos evidéncia numérica de que produce resultados mas confiables que el método de Saaty.

Abstract

The analytic hierarchy process is a leader tool among multicriteria decision models. Nevertheless, Saaty's eigenvector method [7] to find the preferences vector has been criticized. As an alternative we propose a new method to calculate the priority vector based on the projection of the priorities matrix onto the set of consistent matrices. We show that our method is well defined, and present numerical evidence that it produces more robust results than Saaty´s method.

Keywords: Proceso Analítico Jerárquico, Toma de decisiones multi-objetivo, optimización .

1. Introducción

El proceso analítico jerárquico (Analytic Hierarchy Process, AHP) ha sido aceptado como un modelo de decisión multicriterio lider tanto para el mundo académico como para las aplicaciones prácticas (Saaty [7]). Los resultados del AHP han sido validados en el contexto de muchos escenarios de la toma de decisiones en el mundo real. Este éxito ha llevado a numerosas aplicaciones. Sin embargo el método de vectores propios de Saaty, que es el corazón de la versión mas familiar del AHP ha sido muy criticado. El bien conocido problema de rango reverso (Barzilai [1]; Belton y Gear [2, 3];Dyer [4]; Holder [5]) ha sido citado por muchos críticos como un punto debil en la teoría del AHP. Estas debilidades motivan a buscar alternativas para el cálculo del vector de preferencias, y así subsanar las deficiencias del método de vectores propios. El proceso analítico jerárquico se basa en establecer una relación jerárquica entre las varias alternativas de decisión posibles, haciendo comparaciones proporcionales entre cada par de alternativas, para luego establecer relaciones proporcionales globales entre el conjunto integral de las alternativas.

*Departamento de Investigacion de Operaciones, Decanato de Ciencias. Universidad CentroOccidental Lisandro Alvarado (UCLA). Apdo 400. Barquisimeto. Venezuela. Research suported in part by CDCHT-UCLA, Venezuela.

**Departamento de Investigacion de Operaciones, Decanato de Ciencias. Universidad CentroOccidental Lisandro Alvarado (UCLA). Apdo 400. Barquisimeto. Venezuela. Research supported in part by CDCHT-UCLA Venezuela

Se construye con las comparaciones por pares una matriz, que llamamos de preferencias, la cual tiene como características la positividad y la reciprocidad. Una matriz positiva y recíproca que además sea transitiva (que llamaremos consistente) es de rango uno, y puede ser escrita como el producto de un vector columna por el vector fila cuyas componentes son los inversos multiplicativos de las componentes del vector columna. La propiedad de transitividad aporta las relaciones de prioridades entre el conjunto global de las alternativas. La esencia del AHP es descubrir la transitividad entre las alternativas de desición. El vector propio de Saaty genera una matriz consistente. La pregunta es: ¿Es la matriz generada por el vector propio la mejor matriz consistente? El objetivo de este trabajo es proponer un método para calcular el vector de preferencias del AHP que calcula la matriz consistente mas cercana a la matriz de preferencia dada. Demostramos que nuestro método consigue vectores de preferencias mas confiables que el vector dado por el método de Saaty.

El resto del artículo se describe como sigue: En el próximo capítulo presentamos algunas definiciones y construcciones preliminares, y establecemos el problema a resolver. En el capítulo 3 escribimos el problema como uno de proyección en el conjunto de las matrices consistentes. Además establecemos las bases para definir el método de cálculo, y definimos un índice de consistencia. En el capítulo 4 describimos el algoritmo de optimización adaptado a nuestro problema de proyección. En el sexto capítulo presentamos algunos experimentos numéricos de comparación entre los métodos y en el último capítulo ofrecemos algunos comentarios finales y posibles direcciones futuras.

2. Preliminares

En este trabajo consideramos el problema de establecer una relación jerárquica entre las varias alternativas de decisión posibles, haciendo comparaciones proporcionales entre cada par de alternativas para luego establecer relaciones proporcionales globales entre el conjunto integral de alternativas. Esta estrategia para toma de decisiones multi-objetivo es llamada proceso analítico jerárquico (AHP), fué establecido por Tomas Saaty [7] en la década de los ochenta y ha sido ampliamente estudiado hasta hoy (ver www.isahp.org). Para ilustrar el funcionamiento del AHP proponemos un ejemplo simple: deseamos comprar un automovil y debemos escoger entre 4 alternativas posibles. Haciendo comparaciones por pares de alternativas tenemos que por ejemplo preferimos el modelo A dos veces mas que el B, y el C tres veces mas que el D, etc. De esta manera obtenemos una colección de datos que nos permite escribir una matriz de preferencias:

	modelo A	modelo B	modelo C	modelo D
modelo A	1	2	1/2	3
modelo B	1/2	1	2	2
modelo C	2	1/2	1	3
modelo D	1/3	1/2	1/3	1

Cada componente de la matriz de preferencias representa la proporcion de la decisión tomada por parejas de alternativas, por ejemplo $a_{23} = 2$ significa que preferimos 2 veces mas el modelo 2 que el 3.

La matriz de preferencias, que denotaremos por A es una matriz cuadrada con las siguientes características especiales: A es recíproca

$$a_{ij} = 1/a_{ji}, \forall i, j \tag{1}$$

además A es positiva

$$a_{ij} > 0, \forall i, j. \tag{2}$$

Como el objetivo de la toma de decisiones es seleccionar entre una de las alternativas existentes, nos gustaría extraer de los datos obtenidos alguna información sobre cuál de las alternativas es la favorita. Las comparaciones por parejas nos dan la preferencia relativa entre dos de las alternativas, pero también nos aporta información global entre el conjunto de alternativas, que al principio parece imperceptible, pero al ser colocada en evidencia nos proporciona elementos para tomar la decisión. Esta información adicional está dada por relaciones de transitividad entre las proporciones aportadas por el tomador de decisiones. Para ilustrar veamos el siguiente ejemplo: Si preferimos la alternativa A 2 veces más que la B y a la vez preferimos B 3 veces más que la C, entonces de manera intuitiva debería preferirse la alternativa A $2 \times 3 = 6$ veces más que la C. Como no reparamos en la exactitud de las proporciones cuando comparamos par a par dos alternativas, es difícil hacer las comparaciones que verifiquen la transitividad de manera conciente, pero esta transitividad aproximada existe. El principio fundamental del AHP es descubrir esta relación de transitividad y tomar ventaja de ella para establecer las relaciones de prioridades entre el global de las alternativas. En este sentido el AHP clásico procura encontrar una matriz de preferencias X del mismo tamaño de A, que verifiquen las propiedades (1) y (2) pero que también sea transitiva, es decir $x_{ij} = 1/x_{ji}$ y $x_{ij} > 0$ para todo i, j; además

$$x_{ik}x_{kj} = x_{ij}, \forall i, j, k, \tag{3}$$

y que de alguna manera sea parecida con A. Podemos demostrar que si una matriz verifica estas tres propiedades, es de rango 1:

Lemma 2.1 *Consideremos una matriz cuadrada X de tamaño n que verifique las propiedades de positividad, reciprocidad y transitividad. Entonces existe un n-vector $u > 0$ tal que $X = uu^{-T}$.*

Demostración. Tomemos u como la primera fila de X. Debemos probar que $x_{ij} = u_i/u_j$ para i, j arbitrario. En efecto

$$x_{ij} = x_{i1}x_{1j} = \frac{x_{i1}}{x_{j1}} = \frac{u_i}{u_j}.$$

La primera igualdad es por la propiedad de transitividad, la segunda por la de reciprocidad y la tercera por la definición de u. ∎

El método de Saaty [7] busca una matriz positiva, recíproca y transitiva; que en adelante llamaremos matriz consistente, y debido al lema anterior ésta puede ser generada por un vector que contiene toda la informacion que había sido recolectada en la matriz de preferencias A. El vector u (expresado en forma normalizada) nos da las relaciones relativas entre las diferentes alternativas existentes, clasificándolas por orden de prioridad. Para calcular el vector u, Saaty propuso al vector propio asociado al mayor valor propio de la matriz A, esgrimiendo principalmente dos razones: La primera es que si la matriz de preferencias original A fuera de rango uno, entonces ésta tendría un único valor propio, y el único vector propio generaría la matriz. La otra razón es dada por la siguiente propiedad (ver [1]): Sea una matriz positiva A, y λ el mayor valor propio. Entonces

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A^k}{\lambda^k} = uw^T$$

donde v y w son los vectores propios por la derecha y por la izquierda de A, asociados al valor propio λ. Es fácil ver que si A es positiva y recíproca entonces $w = v^{-1}$ y la matriz límite puede ser expresada de la manera dada en el lema 2.1.

Aunque el método de cálculo de Saaty nos proporciona una manera sencilla de extraer la transitividad de la matriz A, no hay muchas razones para pensar que nos proporciona la mejor matriz consistente posible. Nuestra pregunta es, ¿Es la matriz obtenida por Saaty una buena aproximación de la matriz original? El objetivo del presente trabajo es demostrar que no; y esto lo hacemos proporcionando otro método de cálculo que nos aporta la matriz mas cercana de la matriz original, es decir la proyección de la matriz de preferencias en el conjunto de las matrices consistentes.

3. Proyección de A en el conjunto de las matrices consistentes

En esta sección vamos a establecer un método para encontrar el vector de preferencias del AHP, basado en la proyección de la matriz de preferencias obtenida de las comparaciones por pares. Nuestro método se basa en la resolución del problema

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{minimizar} & \|X - A\|_F \\ & \text{sujeto a} & X \text{ Consistente,} \end{array}$$

donde $\|.\|_F$ denota la norma de Frobenius. P es un problema de optimización en el espacio de las matrices. Optimizacion en matrices es un problema que no tiene muchas herramientas para intentar buenas y rápidas soluciones, es decir dependiendo de las restricciones para las matrices, el problema puede ser muy difícil. Afortunadamente podemos hacer transformaciones en nuestro problema para hacerlo computacionalmente manejable, debido a las características especiales que éste posee. Por el lema 1, si X es consistente, entonces existe $u \in I\!R^n_{++}$ tal que $X = uu^{-T}$, entonces nuestro problema puede ser escrito como:

$$\begin{array}{lll} (\bar{P}) & \text{minimizar} & \|uu^{-T} - A\|_F \\ & \text{sujeto a} & u \geq 0, \end{array}$$

que es un problema de optimización en vectores.

En lo sucesivo vamos a establecer las bases de como encontrar soluciones para el AHP, desde éste punto de vista. Usaremos un algoritmo para resolver problemas de optimización continua en $I\!R^n$, mas específicamente usaremos un método de tipo cuasi-newton con búsqueda de Armijo, que nos dan soluciones satisfactorias, con poco esfuerzo computacional (para algoritmos de optimización continua ver [6]). Primero examinaremos las propiedades especiales de nuestro problema de optimización, como son las derivadas de la función objetivo, y caracterizaciones de las soluciones: Comenzamos con la caracterización de f y el cálculo del gradiente:

Teorema 3.1 *Sea A una matriz $n \times n$ positiva y recíproca; y consideremos la función $f(u) = 1/2\|uu^{-T} - A\|^2_F$, entonces:*

1. $f(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2\|u^{-1}\| - u^{-1}Au + \|A\|^2_F$
2. $\nabla f(u) = \|u^{-1}\|^2 u - \|u\|^2 u^{-3} - A^T u^{-1} + U^{-2}Au$

Demostración. Por definición, para una matriz B de tamaño $n \times n$, $\|B\|^2_F = tr(B^T B)$. Estudiemos la matriz $(uu^{-T} - A)^T(uu^{-T} - A)$:

$$(uu^{-T} - A)^T(uu^{-T} - A) == \|u\|^2 u^{-1}u^{-T} - u^{-1}u^T A - A^T uu^{-T} + A^T A.$$

Obteniendo la traza de esta última expresión, y usando el hecho las que matrices cuadradas y sus traspuestas tienen la misma traza obtenemos

$$f(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2\|u^{-1}\|^2 - u^{-1}Au + \frac{1}{2}\|A\|^2_F,$$

esto termina la prueba de la primera parte.

Ahora derivamos f con respecto a u_k:

$$f'_{u_k}(u) = \|u^{-1}\|^2 u_k - \|u\|^2 u_k^{-3} + \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{u_k^2} a_{ik} - \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{kj}}{u_j}$$

así

$$\nabla f(u) = \|u^{-1}\|^2 u - \|u\|^2 u^{-3} + UAu^{-2} - Au^{-1}$$

donde U es una matriz diagonal cuya diagonal principal son los elementos de u. ∎

El próximo teorema muestra que existen mínimos locales de f en el octante positivo, es decir, si al usar algoritmos de descenso comenzamos con un punto inicial con componentes positivas, entonces la solución también tendrá componentes positivas.

Teorema 3.2 *Sea $u^* \geq 0$ un minimizador local de f, entonces $u_i^* \neq 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Demostración. Supongamos por contradicción que existe j tal que $u_j^* = 0$. Consideremos la trayectoria $u(t)$ para $t > 0$ definida como $u_i(t) = u_i^*$ si $i \neq j$ y $u(t)_j = t$. Claramente $u(0) = u^*$. Evaluaremos la función f en $u(t)$ y después estudiaremos el comportamiento cuando $t \to 0$.

$$\begin{aligned} f(u(t)) &= \tfrac{1}{2}\|u(t)\|^2\|u(t)^{-1}\|^2 - u(t)^{-T}Au(t) + \tfrac{1}{2}\|A\|_F^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(t^{-2} + \|\bar{u}^{*-1}\|^2)(\|\bar{u}^*\|^2 + t^2) - \bar{u}^{*-T}\bar{A}u(t) - A_j^T u(t)t^{-1} + \tfrac{1}{2}\|A\|_F^2 \end{aligned}$$

donde $\bar{A}$ y $\bar{u}^*$ son extraidos de A y u^* eliminando la $j-sima$ fila y la $j-sima$ componente respectivamente. Esta última expresión tiende a infinito cuando t tiende a cero; pero esto es una contradicción ya que $f(u(t)) > f(u^*)$. Luego $u_i^* \neq 0$ para todo i. ∎

El teorema nos garantiza que resolver el problema $(\bar{P})$ es equivalente a resolver el problema con la misma función objetivo, pero sin restricciones, y si utilizamos un algoritmo que haga descender la función objetivo en cada iteración, usando un punto inicial con todas las componentes positivas, entonces encontraremos un minimizador con todas las componentes positivas. Falta demostrar la existencia de minimizadores en el octante positivo:

Teorema 3.3 *Consideremos la función f definida como antes. Entonces existe un minimizador local u^* de f con las componentes estríctamente positivas.*

Demostración. Por el teorema anterior, las componentes de un minimizador local de f tienen que ser diferentes de cero. La función f es acotada inferiormente por cero, ya que se trata de una distancia. Supongamos por contradicción que no existen minimizadores locales de f en $\mathbb{R}_{++}^n$, entonces debe existir una sucesión de puntos $\{u^k\}$ en $\mathbb{R}_{++}^n$ tal que $f(u^{k+1}) < f(u^k)$ para todo k, y verificando que $\|u^k\| \to \infty$. Tomamos una componente u_j^k de la sucesión tal que $u_j^k \to \infty$. Debe existir tal componente pues la norma de la sucesión crece infinitamente. Evaluemos ahora la función f en el elemento k de la sucesión, es decir

$$\begin{aligned} f(u^k) &= \tfrac{1}{2}\|u^k\|^2\|u^{k^{-1}}\|^2 - u^{k^{-T}}Au^k + \tfrac{1}{2}\|A\|_F^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(u_j^{k^2} + \|\bar{u^k}\|^2)(\|\bar{u^k}-1\|^2 + {u_j}^{k^{-2}}) - \bar{u^k}^{-T}\bar{A}u^k - A_j^T u^k {u_j}^{k^{-1}} + \tfrac{1}{2}\|A\|_F^2 \end{aligned}$$

donde $\bar{A}$ es extraida de A eliminando la $j-sima$ fila. Esta última expresión tiende a infinito cuando $u_j^k \to \infty$, pero esto es una contradicción, puesto que $f(u^{k+1}) > f(u^k)$. Luego, debe existir una solución $u^* > 0$ al problema de minimizar f en $\mathbb{R}_{++}^n$. ∎

3.1. Índice de consistencia

Como estamos tratando con aproximaciones de los datos originales, es natural establecer una medida de semejanza de los datos obtenidos por nuestro cálculo con los datos originales. Esta medida la llamaremos de consistencia, pues debe medir cuanto la matriz de preferencias es parecida a una matriz consistente. Una medida de consistencia natural la aporta la diferencia relativa (o error relativo) de la matriz A con la matriz de proyección $X = uu^{-T}$ encontrada por nuestro procedimiento, así, nuestro índice de consistencia es

$$CI = \frac{\|uu^{-T} - A\|_F}{\|A\|_F}.$$

Si la matriz A es consistente, entonces es fácil probar que $CI = 0$, y mientras mayor sea CI, mas lejana al conjunto de matrices consistentes es A. En la sección 4 usaremos éste índice de consistencia para demostrar numéricamente que la matriz obtenida por el AHP no es necesariamente parecida con la matriz de preferencia original.

4. Cálculo de la proyección

En esta sección establecemos el algoritmo para encontrar el vector de preferencias que genera la matriz de proyección del problema (P). El problema a resolver, establecido como $(\bar{P})$ requiere el uso de algoritmos de descenso que usen derivadas como los algoritmos Cuasi-Newton (Para algoritmos de descenso ver [6]). Para iniciar el algoritmo requerimos de un punto inicial que nos garantice la convergencia rápida. Las características especiales de nuestro problema proporcionan puntos de inicio naturales, dados por la filas (o columnas) de la matriz de preferencias. Como las filas de la matriz proyección son linealmente dependientes (ya que esta es de rango uno), y esta es generada por el vector de preferencias (es decir, sus filas son proporcionales al vector de preferencias), entonces una buena aproximación de éste la proporciona cualquier fila de la matriz original. Denotemos por a^o una fila de la matriz A. El algoritmo para encontrar el vector de preferencias queda establecido como:

Algoritmo 4.1 *Algoritmo Cuasi Newton*

- *Especifique $u^o > 0$ (en nuestro caso $u^o = a^o$); $B_0 = I$ (la matriz identidad) y una tolerancia ϵ.*
- *Para $k = 0, 1, \ldots$*
  - *Si u^k es optimal ($\|\nabla f(u^k)\| < \epsilon$), pare.*
  - *Resuelva $B_k d = -\nabla f(u^k)$ para obtener d^k.*
  - *Escoja α_k el primer valor de la sucesión $\{,8^l\}$ ($l = 1, 2, \ldots$) tal que $f(u^k + ,8^l d) < f(u^k) + ,8^l (,6) \nabla f(u^k)^T d^k$ (búsqueda de Armijo).*
  - *Haga $u^{k+1} = u^k + \alpha_k d^k$.*
  - *Calcule $s^k = u^{k+1} - u^k$ y $y^k = \nabla f(u^{k+1}) - \nabla f(u^k)$.*
  - *Actualice B_k:*

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(y^k - B_k s^k)(y^k - B_k s^k)^T}{(y^k - B_k s^k)^T s^k}$$

La fórmula de actualización de la matriz B_k es conocida como actualización simétrica de rango uno. Esta fórmula es suficiente para nuestro propósito, pero podría ser utilizada cualquier otra, por ejemplo la más popular BFGS (ver [6]), con resultados similares. La selección del tamaño del paso, dado por el método de Armijo es un procedimiento simple de implementar, barato computacionalmente y útil para garantizar que el algoritmo escoje puntos de descenso en las direcciones dadas. La próxima sección estará dedicada a algunos resultados de experimentación numérica de nuestra implementación del método descrito aquí, y del método de Saaty para el AHP.

5. Experimentación Numérica

En esta sección presentaremos algunos resultados numéricos de comparación entre las dos maneras de calcular el vector de preferencias del AHP, dados por el cálculo del vector propio asociado al mayor autovalor, y dado por el vector que genera la matriz proyección de A en el conjunto de las matrices consistentes. Los algoritmos fueron elaborados en Matlab. Presentaremos cinco problemas que provienen de la literatura del AHP. Para cada problema escribiremos la matriz de preferencias dada por la situación real (denotada por A). Luego damos las matrices encontradas por el proceso analítico jerárquico, que denotaremos por $AAHP$ junto con el vector de preferencias de éste método ($vahp$) y su coeficiente de consistencia $ICAHP$. Luego mostramos la matriz proyección de A sobre el espacio de las matrices consistentes, que denotamos por $Aproj$, el vector que la genera $vproj$ y el índice de consistencia $ICproj$.

El primer problema que consideramos tiene como matriz de preferencias:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 0{,}1667 & 1 & 4 \\ 0{,}125 & 0{,}25 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de AHP y el vector de preferencias encontrado para éste problema son:

$$AAHP = \begin{pmatrix} 1 & 4{,}1602 & 11{,}5380 \\ 0{,}2404 & 1 & 2{,}7734 \\ 0{,}0867 & 0{,}3606 & 1 \end{pmatrix} vahp = \begin{pmatrix} 0{,}7536 \\ 0{,}1811 \\ 0{,}0653 \end{pmatrix}$$

mientras que la matriz proyección y el vector de preferencias que la genera son:

$$Aproj = \begin{pmatrix} 1 & 5{,}2182 & 8{,}4815 \\ 0{,}1916 & 1 & 1{,}6254 \\ 0{,}1179 & 0{,}6152 & 1 \end{pmatrix} vopt = \begin{pmatrix} 0{,}7636 \\ 0{,}1463 \\ 0{,}0900 \end{pmatrix}$$

Si observamos las matrices $AAHP$ y $Aproj$ obtenidas, comparándolas con la matriz de preferencias original A, nos damos cuenta de manera intuitiva que la mas parecida a la original es la proyección. Esta observación es comprobada haciendo uso del índice de consistencia definido en la sección 3 como el error relativo de la proyección con la matriz original. En éste caso los índices son $ICAHP = 0{,}3825$ y $ICProj = 0{,}2357$. Claramente la matriz proyección tiene una diferencia relativa menor con respecto a la matriz de preferencias original.

El segundo problema a considerar es definido por la matriz de preferencias A, sobre la cual calculamos los otros datos de análisis:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0{,}2 & 1 & 0{,}3333 \\ 0{,}25 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AAHP = \begin{pmatrix} 1 & 6{,}6943 & 2{,}9876 \\ 0{,}1494 & 1 & 0{,}4463 \\ 0{,}3347 & 2{,}2407 & 1 \end{pmatrix}, vahp = \begin{pmatrix} 0{,}6738 \\ 0{,}1007 \\ 0{,}2255 \end{pmatrix},$$

$$Aproj = \begin{pmatrix} 1 & 5{,}4383 & 3{,}2768 \\ 0{,}1839 & 1 & 0{,}6025 \\ 0{,}3052 & 1{,}6597 & 1 \end{pmatrix}, vproj = \begin{pmatrix} 0{,}6716 \\ 0{,}1235 \\ 0{,}2049 \end{pmatrix}$$

con índices de consistencia $ICAHP = 0{,}2906$ y $ICproj = 0{,}2205$. De nuevo la matriz proyección es mas cercana a la original, como es natural pensar.

El tercer ejemplo muestra una matriz de preferencias que es consistente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AAHP = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, vahp = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,4 \\ 0,4 \end{pmatrix},$$

$$Aproj = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, vproj = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,4 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

Por supuesto, los índices de consistencia son ambos muy cercanos a cero. Es el único caso donde las matrices del AHP y la proyección coinciden (además coinciden con la matriz de preferencias). Los vectores omo es evidente también coinciden.

El próximo ejemplo nos mostrará un caso cuando los errores relativos obtenidos al calcular las matrices esentan una diferencia mayor:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 0,1250 & 1 & 0,25 \\ 0,1667 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AAHP = \begin{pmatrix} 1 & 11,5380 & 4,1602 \\ 0,0867 & 1 & 0,3606 \\ 0,2404 & 2,7734 & 1 \end{pmatrix}, vahp = \begin{pmatrix} 0,7536 \\ 0,0653 \\ 0,1811 \end{pmatrix},$$

$$Aproj = \begin{pmatrix} 1 & 8,4815 & 5,2182 \\ 0,1179 & 1 & 0,6152 \\ 0,1916 & 1,6254 & 1 \end{pmatrix}, vproj = \begin{pmatrix} 0,7636 \\ 0,0900 \\ 0,1463 \end{pmatrix}$$

Los errores relativos son $ICAHP = 0,3825$ y $ICProj = 0,2357$. Como anunciado, presentan mayor variación que en casos anteriores. Esta diferencia se refleja por ejemplo en los valores de las preferencias. Aunque la alternativa de preferencia es la primera, con una fracción más o menos similar en los dos vectores de preferencia (0,7536 y 0,7636), los porcentajes asignados a las otras alternativas varía bastante.

Nuestro último ejemplo presenta una matriz de preferencias de mayor tamaño:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 & 6 & 6 & 0,33 & 0,25 \\ 0,2 & 1 & 0,33 & 5 & 3 & 3 & 0,2 & 0,1429 \\ 0,3333 & 3 & 1 & 6 & 3 & 4 & 6 & 0,2 \\ 0,1429 & 0,2 & 0,1667 & 1 & 0,3333 & 0,25 & 0,1429 & 0,125 \\ 0,1667 & 0,3333 & 0,3333 & 3 & 1 & 0,5 & 0,2 & 0,1667 \\ 0,1667 & 0,3333 & 0,2500 & 4 & 2 & 1 & 0,2 & 0,1667 \\ 3 & 5 & 0,1667 & 7 & 5 & 5 & 1 & 0,5 \\ 4 & 7 & 5 & 8 & 6 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación damos los vectores de preferencias obtenidos por ambos enfoques:

$$vahp = \begin{pmatrix} 0,1730 & 0,0540 & 0,1881 & 0,0175 & 0,0310 & 0,0363 & 0,1668 & 0,3332 \end{pmatrix}^T$$

y

$$vproj = \begin{pmatrix} 0,2202 & 0,0468 & 0,1494 & 0,0290 & 0,0413 & 0,0416 & 0,2029 & 0,2687 \end{pmatrix}^T$$

con índices de consistencia $ICAHP = 0{,}6237$ y $ICProj = 0{,}3612$. En éste caso las diferencias son mayores. Destaca el hecho que el orden de las preferencias es diferente; es decir si observamos el orden de prioridades dado por el AHP, la última alternativa tiene la mayor prioridad en ambos enfoques, pero la segunda prioridad la tiene la tercera alternativa en el AHP (con peso 0,1881) mientras que la segunda prioridad del enfoque de proyección es la primera alternativa (con peso 0,2202). Tomando en cuenta que el error relativo asociado al AHP es casi el doble que el error en nuestro enfoque, consideramos que estas últimas prioridades deben ser más confiables.

6. Comentarios finales

En el presente trabajo presentamos un nuevo método para encontrar el vector de prioridades del proceso analítico jerárquico, basado en efectuar la proyección de la matriz de prioridades en el conjunto de las matrices consistentes, y tomar como vector de prioridades al vector que genera la matriz proyección. El enfoque coincide con el dado por Saaty solamente en el caso de que la matriz de prioridades sea consistente, pero en el caso general produce un orden de prioridades diferente. Enumeraremos los logros descritos en el trabajo:

1. Proponemos el problema de encontrar el vector de preferencias del proceso analítico jerárquico como un problema de proyección de la matriz de prioridades en el conjunto de las matrices consistente, en contraste con el cálculo de los vectores propios.

2. Describimos el problema de proyección como un problema de optimizacion diferenciable en el espacio $I\!R^n$. Para esto mostramos que las matrices consistentes se escriben como el producto de un vector columna con otro vector fila, cuyas componentes son las inversas multiplicativas de las componentes del primero. Luego calculamos las derivadas de la función de proyección, y después probamos que ésta tiene minimizadores en el octante positivo.

3. Presentamos un índice de consistencia, definido como la diferencia relativa entre la matriz consistente dada con la matriz de prioridades original.

4. Implementamos un algoritmo de optimización conocido como algoritmo Cuasi-Newton con actualización simétrica de rango uno, y con búsqueda de armijo, aplicado a la función de proyección encontrada, para buscar el vector que genera la matriz proyección.

5. Comparamos los métodos de cálculo en algunos ejemplos, encontrando que el índice de consistencia de la matriz proyección es menor en todos los casos no triviales estudiados, comparado con el índice de consistencia de la matriz del proceso analítico jerárquico.

6. Encontramos diferencias notables en los vectores de prioridades dados por ambos enfoques; y aunque los experimentos no han sido extensos encontramos evidencia significativa para conjeturar que nuestro método de cálculo presenta vectores de prioridades más confiables.

7. El presente trabajo abre, en nuestra opinión, un gran abanico de problemas teóricos y prácticos a resolver en la implementación de los métodos usados en el proceso analítico jerárquico, y en la aplicación del método en problemas de decisión, donde el proceso analítico jerárquico no ha sido satisfactorio.

Referencias

[1] J. Barzilai, W. Cook and B. Golany. "Consistent weights for judgement matrices of the relative importance of alternatives" *Operation Research Letters.* 6, (2), 131–134, (1987).

[2] V. Belton and T. Gear. "On a short comming of Saaty's method of Analytic Hierarchies". *Omega,* 11 (3) 228–230 (1985)

[3] V. Belton and T. Gear. "The legitimacy of rank reversal- A comment". *Omega,* 13 (3), 143–144 (1985)

[4] J. Dyer. "Remarks on the analytic hierarchy process," *Management Science,* 36 (3), 249–258 (1990)

[5] R. Holder. "Some comment on the analytic hierarchy process", *Journal of the Operational Research Society,* 41 (11), 1073–1076 (1990)

[6] S.Ñash and A. Sofer. "Linear and nonlinear programming", *McGraw Hill* (1997)

[7] T. Saaty. "Multicriteria Decision Making: The Analytic Hierarchy Process", *RWS Publications,* Pittsburg. PA (1990).