TOPOLOGÍA DE BRANAS

Edmundo Castillo y Rafael Díaz

Resumen

Para cada par de variedades compactas y orientadas Y y M construimos la categoría $\mathrm{H}(M^{S(Y)})$ de homologías de Y-branas que se extienden entre D-branas embebidas en M usando intersección transversal al estilo de Chas y Sullivan.

Classificacíon AMS: 18D35, 18G35, 18G55, 57R90.
Palabras Claves: Topología de branas, variedades con esquinas, categorías graduadas.

Abstract

We construct for each pair of compact oriented manifolds Y and M the category $\mathrm{H}(M^{S(Y)})$ of homologies of Y-branes extended between D-branes embedded in M using transversal intersecttion in the sense of Chas and Sullivan.

AMS Subjec-classification: 18D35, 18G35, 18G55, 57R90.
Keywords: Brane Topology, Manifolds with corners, Graded Categories.

1. Introducción

Este trabajo forma parte de un programa orientado a estudiar invariantes topológicos para variedades diferenciales compactas orientadas basado en la siguiente idea. Se fija una variedad diferencial compacta L y para cada variedad M se considera el espacio topológico

$$F(L, M) = \{\gamma \mid \gamma\colon L \to M \quad \text{suave a trozos}\}$$

dotado con la topología compacto abierta. La homología singular $H(F(L,M))$ de $F(L,M)$ es un invariante topológico que asigna a cada variedad M un espacio vectorial $\mathbb{Z}$-graduado. Veremos que si uno elige L convenientemente los espacios $H(F(L,M))$ adquieren una rica estructura adicional que merece ser estudiada a profundidad.

Para ubicar al lector en el tipo de problemas que vamos a tratar, mencionamos algunos puntos remarcables en el desarrollo histórico de este programa. El primer ejemplo proviene de la topología algebraica clásica. Dado un espacio topológico M con un punto marcado p consideramos el espacio de lazos en M basados en p, es decir, el espacio topológico

$$\Omega_p(M) = \{\gamma \mid \gamma\colon S^1 \to M,\ \gamma(1) = p\}.$$

El espacio de lazos basados admite un producto $\Omega_p(M) \times \Omega_p(M) \to \Omega_p(M)$ asociativo módulo homotopías llamado producto de Pontryagin. Tomando cocientes el producto de Pontryagin induce un producto asociativo en la homología $H(\Omega_p(M))$ de $\Omega_p(M)$. En sus célebres trabajos [20, 21] Stasheff introdujo los espacios A_∞ y las álgebras A_∞ como herramientas para el estudio de espacios topológicos homotópicamente equivalentes a monoides topológicos. El ejemplo primordial de espacio A_∞ es precisamente el espacio $\Omega_p(M)$ de lazos basados en un punto. Las cadenas singulares sobre un espacio A_∞

constituyen el ejemplo fundamental de algebra A_∞. La estructura de álgebra A_∞ sobre $C(\Omega_p(M))$, el espacio de cadenas singulares en $\Omega_p(M)$, induce un producto asociativo sobre $H(\Omega_p(M))$ el cual coincide con el producto de Pontryagin.

Un segundo flujo de ideas provino de la teoría de cuerdas, una rama de la física de altas energías cuyo objeto primordial de estudio es la dinámica de un pequeño círculo o lazo. Es decir, la teoría de cuerdas reemplaza el espacio de configuraciones M por el espacio topológico infinito-dimensional

$$\mathrm{L}(M) = \{\gamma \mid \gamma\colon S^1 \to M\}$$

de lazos en M. Las dificultades analíticas presentes en la teoría de cuerdas han impedido hasta la fecha una formalización matemática rigurosa, no obstante Chas y Sullivan en [11] inician el estudio de cuerdas usando herramientas de topología algebraica clásica. La principal contribución de Chas-Sullivan ha sido demostrar que si bien el espacio topológico $\mathrm{L}(M)$ de lazos libres en M no posee un producto análogo al producto de Pontryagin, la homología singular del espacio de lazos $H(\mathrm{L}(M))$ si tiene un producto asociativo $\bullet$, el cual proviene de un producto asociativo módulo homotopías definido para cadenas singulares transversal.

A principios de los ochenta la teoría de cuerdas fue propuesta con mucho impetu por un destacado grupo de físicos teorícos (las referencias [23, 24, 25] son cercanas al espíritu de este trabajo) como una teoría unificadora de todas las fuerzas de la naturaleza, y se observó la necesidad de estudiar no solo cuerdas cerradas, sino tambien cuerdas abiertas. Una década más tarde se entendió que el estudio correcto de las cuerdas abiertas requiere la introducción de las D-branas como condiciones de frontera. Posteriormente los físicos teorícos se vieron en la necesidad de generalizar la propia teoría de cuerdas introduciendo las branas ya no solo como condiciones de frontera sino como objetos fundametales. El tema principal de este trabajo consiste en estudiar con herramientas de topología algebraica clásica el espacio de membranas dinámicas con condiciones de frontera.

Sea I el intervalo unitario y Y una variedad compacta orientada cuya dinámica en otra variedad M queremos estudiar. El espacio de las posibles formas de moviento de Y en M es el espacio de funciones

$$Y \times I \longrightarrow M.$$

Es importante remarcar que $Y \times I$ tiene dos subvariedades distinguidas, a saber, $Y \times \{0\}$ y $Y \times \{1\}$. Nosotros vamos a concentrar nuestra atención en un tipo restringido de posibles movientos de Y. Supongamos que N_0 y N_1 son subvariedades suaves orientadas embebidas en M, definimos el espacio topológico de Y-branas que se mueven de N_0 a N_1 de la siguiente manera:

$$M^{S(Y)}(N_0, N_1) = \left\{ \gamma \middle| \begin{array}{c} \gamma\colon Y \times I \to M,\ \gamma(Y \times \{0\}) \in N_0,\ \gamma(Y \times \{1\}) \in N_1 \\ \gamma \text{ es constante en entornos de } Y \times \{0\} \text{ y } Y \times \{1\} \end{array} \right\}.$$

Por definición las funciones en $M^{S(Y)}(N_0, N_1)$ colapsan las fronteras de $Y \times I$ a puntos que viven en N_0 y N_1 respectivamente. En el cuerpo del trabajo se entederá con claridad porque solo consideramos movientos de Y que satisfacen este tipo de restricciones.

Una vez fijados nuestros espacios de Y-branas procedemos a demostrar que existe un producto o composición $\bullet$ para cadenas de Y-branas que se intersectan transversalmente. Es decir dadas cadenas transversales $x \in \mathrm{C}(M^{S(Y)}(N_0, N_1))$ y $y \in \mathrm{C}(M^{S(Y)}(N_1, N_2))$ definimos la cadena composición $x \bullet y$. La composición $\bullet$ es asociativa módulo homotopías a nivel de cadenas e induce una composición asociativa $\bullet$ en homología

$$\bullet\colon \mathrm{H}(M^{S(Y)}(N_0, N_1)) \otimes \mathrm{H}(M^{S(Y)}(N_1, N_2)) \to \mathrm{H}(M^{S(Y)}(N_0, N_2)).$$

De esta forma obtenemos un nuevo invariante topológico para variedades diferenciables orientadas, el cual asigna a cada variedad orientada M la categoría graduada $\mathrm{H}(M^{S(Y)})$ cuyos objetos son subvariedades orientadas embebidas en M y cuyos morfismos entre subvariedades N_0 y N_1 son clases de homologías de Y-branas que se extienden de N_0 a N_1.

2. Homología usando variedades con esquinas

Recordamos el concepto de variedad con esquinas. Para cada par de enteros $0 \leq k \leq n$ denotamos por H_k^n al subespacio de $\mathbb{R}^n$ dado por

$$H_k^n = [0, \infty)^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, \cdots, x_k \geq 0\}.$$

El interior $\partial_0(V)$ de conjunto $V \subseteq H_k^n$ lo definimos de la siguiente manera

$$\partial_0(V) = V \cap (0, \infty)^k \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

Una aplicación $f \colon V \to \mathbb{C}$ definida sobre un abierto $V \subseteq H_k^n$ es suave si existe un abierto $W \subseteq \mathbb{R}^n$ y una aplicación suave $F \colon W \to \mathbb{C}$ tal que

$$V = W \cap H_k^n \text{ y } F|_V = f.$$

El haz C^∞ de funciones suaves sobre H_k^n está dado sobre un abierto $V \subset H_k^n$ por

$$C^\infty(V) = \{f \colon V \to \mathbb{C} \mid \text{exite abierto } W \subseteq \mathbb{R}^n \text{ y aplicación } \tilde{f} \in C^\infty(W) \text{ tal que } f = \tilde{f}|_V\}.$$

Dados abiertos $V_1 \subset H_{k_1}^n$ y $V_2 \subset H_{k_2}^n$ decimos que una aplicación suave $f \colon V_1 \to V_2$ es un difeomorfismo si es un homeomorfismo con aplicación inversa $g \colon V_2 \to V_1$ suave.

Una n-variedad topológica con esquinas es un espacio topológico Hausdorff M localmente homeomorfo a H_k^n para algún $0 \leq k \leq n$, esto es, si existe un cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in \Lambda}$ de M tal que para cada $i \in \Lambda$, existe una aplicación $\varphi_i \colon U_i \to H_{k_i}^n$, $0 \leq k_i \leq n$, la cual es un homeomorfismo sobre un subconjunto abierto de $H_{k_i}^n$. El par (φ_i, U_i) es una carta con dominio U_i; el conjunto de cartas $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i \in \Lambda}$ es un atlas. Dos cartas $(\varphi_i, U_i), (\varphi_j, U_j)$ tienen solapamiento suave si las aplicaciones de cambio de coordenadas

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \colon \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

son suaves. Un atlas sobre M es suave si todo par de cartas tienen solapamiento suave. Una n-variedad diferencial con esquinas es un espacio Hausdorff junto con un atlas suave maximal.

Se puede desarrollar la geometría diferencial para variedades con esquinas en paralelo a la teoría para variedades suaves, en particular se pueden definir variedades tangente y cotangente, campos multivectoriales y formas diferenciales, entre otros conceptos. Cada variedad con esquinas es una variedad estratificada. Los estratos suaves de H_k^n están dados para $0 \leq l \leq k$ por

$$\partial_l H_k^n = \{x \in H_k^n \mid x_i = 0 \text{ para exactamente } l \text{ de los primeros } k \text{ indices}\}.$$

Observese que

$$\partial_l H_k^n = \bigsqcup_{I \subseteq \{1, \cdots, k\}, |I| = l} H_I^n,$$

donde $H_I^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i = 0 \text{ si y solo si } i \in I\}$. En general los estratos suaves de una variedad con esquinas M se definen de la siguiente manera:

$$\partial_l M = \left\{ m \in M \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{existen coordenadas locales alrededor} \\ \text{de } m \text{ tales que } m \in \partial_l H_k^n \text{ y } 0 \leq l \leq k \end{array} \right\}.$$

Cada $\partial_l M$ es una subvariedad suave de M de codimensión l.

Denotamos por $\langle X \rangle$ al $\mathbb{C}$-espacio vectorial generado por el conjunto X. Dada una variedad orientada M definimos el espacio vectorial graduado

$$C(M) := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} C_i(M),$$

donde $C_i(M)$ es el espacio vectorial complejo dado por

$$\frac{\left\langle \overline{(K_x, x)} : \begin{array}{l} K_x \text{ es } i-\text{variedad conexa orientada con es-} \\ \text{quinas y } x\colon K_x \to M \text{ es una aplicación suave} \end{array} \right\rangle}{\langle \overline{(K_x, x)} - \overline{(-K_x, x)} \rangle}.$$

En la última fórmula usamos las siguientes convenciones:

1. $\overline{(K_x, x)}$ denota la clase de equivalencia del par (K_x, x) bajo la siguiente relación: (K_x, x) es equivalente a (K_y, y) si existe un difeomorfismo $\alpha : K_x \to K_y$ tal que $x = y \circ \alpha$.
2. Si M es una variedad orientada $-M$ denota la misma variedad con la orientación opuesta.

Por simplicidad en lo sucesivo no distinguiremos al par (K_x, x) de su clase de equivalencia $\overline{(K_x, x)}$.

Definición 1. Definimos la aplicación $\partial\colon C_i(M) \to C_{i-1}(M)$ por

$$\partial(K_x, x) = \sum_c (\bar{c}, x_{\bar{c}}),$$

donde la sumatoria corre sobre las componentes conexas de $\partial_1 K_x$ dotada con la orientación inducida y $x_{\bar{c}}$ denota la restricción de x a la clausura $\bar{c}$ de c.

Teorema 2. $(C(M), \partial)$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial diferencial $\mathbb{Z}$-graduado. Además

$$H(C(M), \partial) = \text{homología singular de } M.$$

Demostración. Denotemos por $C_{\text{sing}}(M)$ las cadenas singulares en M. Como cada simplex es una variedad con esquinas obtenemos una aplicación natural $i\colon C_{\text{sing}}(M) \to C(M)$. La aplicación i induce un isomorfismo en cohomología puesto que cualquier variedad con esquinas puede ser triangulada, y por lo tanto, cualquier cadena en $C(M)$ es homóloga a una suma de cadenas in $C_{\text{sing}}(M)$. □

3. Intersección transversal

Los resultados obtenidos en esta sección nos proporcionan las herramientas básicas para las construcciones realizadas en el resto del trabajo. Comenzamos generalizando la teoría de intersección transversal al caso de variedades con esquinas.

Definición 3. Sea $f\colon M \to N$ una aplicación suave, donde M es una variedad con esquinas y N una variedad suave. Diremos que $n \in N$ es un valor regular para f si para todo $0 \leq l \leq k$ y todo $m \in \partial_l M$ tal que $f(m) = n$, se tiene que la aplicación $d_m f\colon T_m \partial_l M \to T_n N$ es sobreyectiva.

Definición 4. Sean N_0 y N_1 variedades con esquinas de dimensión n_0 y N_1, respectivamente, y M una variedad suave. Sean $f_0\colon N_0 \to M$ y $f_1\colon N_1 \to M$ aplicaciones suaves. Decimos que f_0 y f_1 son transversales, $f_0 \pitchfork f_1$, si para todo $0 \leq k \leq n_0$, $0 \leq s \leq n_1$, $f_0 \mid_{\partial_k(N_0)}$ y $f_1 \mid_{\partial_s(N_1)}$ son transversales, i.e., dados $x_0 \in \partial_k(N_0)$ y $x_1 \in \partial_s(N_1)$ tales que $f_0(x_0) = f_1(x_1) = m$ se debe cumplir que

$$d(f_0 \mid_{\partial_k(N_0)})(T_{x_0}\partial_k(N_0)) + d(f_1 \mid_{\partial_s(N_1)})(T_{x_1}\partial_s(N_1)) = T_m M.$$

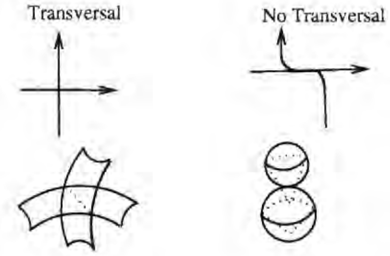

Figura 1: Intersección transversal y no transversal.

En la parte izquierda Figura 1 damos ejemplos de curvas y superficies que se intersectan transversalmente, en la parte derecha mostramos curvas y superfecies que no se intersectan transversalmente.

Lema 5. Sea M una variedad suave y $f = (f_1, \cdots f_s)\colon M \to \mathbb{R}^s$ una aplicación suave con valor regular $(0, \cdots, 0)$. Entonces $\{x \in M \mid f_i(x) \geq 0,\ i = 1, \cdots, s\}$ es una variedad con esquinas.

Demostración. $\{x \in M \mid f(x) > 0\}$ es un subespacio abierto de M, así es una variedad suave. Sea $x \in M$ tal que $f(x) = 0$. Puesto que 0 es un valor regular de f entonces, usando un sistema apropiado de coordenadas locales podemos asumir que $f = \pi$ donde $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ es la proyección canónica $\pi(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_s)$. El resultado deseado se obtiene de la identidad local

$$\{x \in M \mid f_i(x) \geq 0,\ i = 1, \cdots, s\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, s\}.$$

□

Los siguientes resultados están demostrados en [7, ?].

Teorema 6. Sean M una variedad suave y N una variedad con esquinas. Sea $f\colon N \to M$ una aplicación suave y $i\colon P \hookrightarrow M$ una subvariedad suave embebida en M. Si $f \pitchfork i$, entonces $f^{-1}(P)$ es una subvariedad con esquinas de N.

Lema 7. Sean M y N variedades con esquinas entonces $M \times N$ es una variedad con esquinas. Además si $x \in \partial_l M$ y $y \in \partial_k N$, entonces se tiene que $(x, y) \in \partial_{l+k}(M \times N)$.

Sean $f : x \to s$ y $g : y \to s$ funciones continuas entre espacios topológicos. El producto fibrado de x e y sobre s está dado por $x \times_s y\colon = \{(a, b) \mid a \in x,\ b \in y \text{ y } f(a) = g(b)\}$. En la Figura 2 presentamos en la parte superior, dos rectángulos que se fibran sobre una recta y su producto fibrado es un cubo. En la parte inferior un toro y un cilindro que se fibran sobre S^1 y el producto fibrado es un cilindro tórico.

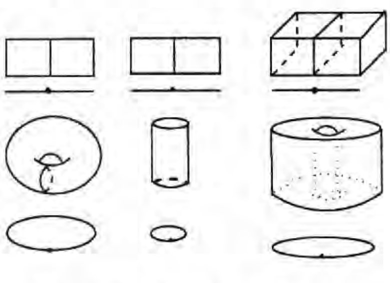

Figura 2: Producto fibrado.

Lema 8. Sean K_x y K_y variedades con esquinas y M una variedad suave orientada. Si $x\colon K_x \to M$ y $y\colon K_y \to M$ son aplicaciones tranversales suaves, entonces $K_x \times_M K_y = \{(a, b) \in K_x \times K_y \mid x(a) = y(b)\}$ es una variedad con esquinas orientada. Además $T(K_x \times_M K_y) = TK_x \times_{TM} TK_y$.

4. Homologías de Y-branas

La motivación para la terminología usada en está sección proviene de la teoría de cuerdas. Las D-branas, abreviación para membranas de Dirichlet, son subvariedades orientadas de un variedad M que fijamos. Las Y-branas son objetos dinámicos con membranas-mundo están determinadas por una aplicación

$$Y \times I \to M.$$

Las D-branas juegan el papel de condiciones de frontera de las Y-branas, cuyas membranas-mundo deben degenerar a puntos en las fronteras de $Y \times I$.

Sean N_1 y N_2 subvariedades compactas orientadas embebidas en M. En esta sección construimos la categoría $\mathrm{H}(M^{S(Y)})$ de clases de homología de Y-branas en M. Primero introducimos formalmente el espacio topológico $M^{S(Y)}(N_0, N_1)$ de las Y-branas de que se extienden de N_0 a N_1. Veamos algunos ejemplos.

Interacciones entre D-branas mediante 0-branas. Las 0-branas son cuerdas abiertas. La Figura 3 representa interacciones de 0-branas dinámicas que se extienden entre dos D-branas.

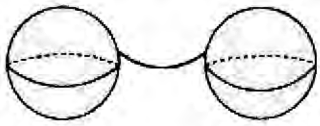

Figura 3: Interacciones entre D-branas y 0-branas.

Interacciones de D-branas por medio de S^p-branas, donde S^p-denota la esfera de dimensión p. En la Figura 4 representamos interacciones de S^p-branas que se extienden entre dos D-branas, en este caso se ve claramente como las p-esferas degeneran a puntos en los extremos del proceso de interacción.

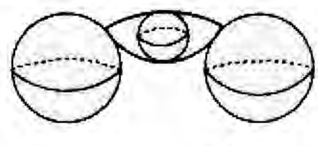

Figura 4: Interacciones entre D-branas y S^p-branas.

Del mismo modo podemos considerar interacciones entre D-branas y T^p-branas, donde T^p es el toro de dimensión p. En la Figura 5 representamos interacciones de T^2-branas que se extienden entre dos D-branas.

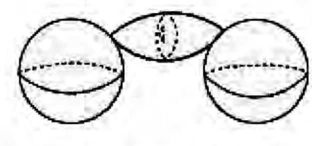

Figura 5: Interacciones entre D-branas y T^2-branas.

Pasamos a definir de manera precisa los espacios de movientos posibles para las Y-branas. Denotamos por $S(Y)$ al espacio $Y \times I/\sim$ donde la relación de equivalencia $\sim$ está dada por $y_1 \times \{0\} \sim y_2 \times \{0\}$ y $y_1 \times \{1\} \sim y_2 \times \{1\}$ para todo $y_1, y_2 \in Y$.

Definición 9. Denotamos por $M^{S(Y)}(N_0, N_1)$ al conjunto de las aplicaciones suaves $f: Y \times [0,1] \to M$ tales que $f(y,0) \in N_0$, $f(y,1) \in N_1$, y f es constante en entornos de $Y \times \{0\}$ y $Y \times \{1\}$. $M^{S(Y)}(N_0, N_1)$ es un espacio topológico con la topología compacto-abierta.

Denotamos por

$$C(M^{S(Y)}(N_0, N_1)) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} C_i(M^{S(Y)}(N_0, N_1))$$

al espacio vectorial generado por las cadenas $x: K_x \to M^{S(Y)}(N_0, N_1)$. Sean

$$e_0: M^{S(Y)}(N_0, N_1) \to N_0 \text{ y } e_1: M^{S(Y)}(N_0, N_1) \to N_1$$

las aplicaciones dadas por $e_0(f) = f(y,0) \in N_0$, y $e_1(f) = f(y,1) \in N_1$. También denotaremos por e_0 y e_1 a las correspondientes aplicaciones a nivel de cadenas

$$e_0: C(M^{S(Y)}(N_0, N_1)) \to C(N_0) \text{ y } e_1: C(M^{S(Y)}(N_0, N_1)) \to C(N_1)$$

dadas por $e_0(c) = \sum a_x e_0(x)$ y $e_1(c) = \sum a_x e_1(x)$.

Definición 10. Decimos que las Y-branas $x: K_x \to M^{S(Y)}(N_0, N_1)$ y $y: K_y \to M^{S(Y)}(N_1, N_2)$ son transversales si $e_1(x)$ y $e_0(y)$ son transversales.

Sean $x: K_x \to M^{S(Y)}(N_0, N_1)$ y $y: K_y \to M^{S(Y)}(N_1, N_2)$ cadenas transversales. El Teorema 6 garantiza que el espacio $K_x \times_{N_1} K_y$ dado por

$$K_x \times_{N_1} K_y = \{(a,b) \in K_x \times K_y \mid e_1 \circ x(a) = e_0 \circ y(b)\}$$

es una variedad con esquinas.

Definición 11. Dadas cadenas transversales $x: K_x \to M^{S(Y)}(N_0, N_1)$ y $y: K_y \to M^{S(Y)}(N_1, N_2)$, denotamos por $x \bullet y$ a la cadena $x \bullet y : K_{x\bullet y} \to M^{S(Y)}(N_0, N_2)$ dada por $K_{x\bullet y} := K_x \times_{N_1} K_y$ y

$$[x \bullet y(a,b)](s,t) = \begin{cases} x(a)(s,2t) & si\ 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \\ y(b)(s,2t-1) & si\ \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Damos otra construcción del dominio $K_{x\bullet y}$ de la cadena $x \bullet y$. Consideremos la aplicación

$$K_x \times K_y \xrightarrow{(x,y)} M^{S(Y)}(N_0, N_1) \times M^{S(Y)}(N_1, N_2) \xrightarrow{(e_1, e_0)} N_1 \times N_1 \supseteq \Delta,$$

donde $\Delta = \{(m,m): m \in N_1\}$. Por composición obtenemos la aplicación

$$e_1(x) \times e_0(y): K_x \times K_y \to N_1 \times N_1 \supseteq \Delta.$$

Es obvio que $K_{x\bullet y}$ está dado por

$$\begin{aligned} K_{x\bullet y} &= K_{e_1(x) \cap e_0(y)} \\ &= \{(a,b) \in K_x \times K_y : \text{x(a)(s,1) = y(b)(s,0)}\}, \end{aligned}$$

donde $K_{e_1(x)\cap e_0(y)}$ es el dominio de la intersección transversal en N_1 de las cadenas $e_1(x)$ y $e_0(y)$. Paramos un instante para hacer unos cometarios sobre espacios graduados. Si V es un espacio vectorial graduado y x un elemento homogéneo de V denotamos por $\overline{x}$ al grado de x. Dado $n \in \mathbb{Z}$ denotamos por $V[n]$ al espacio vectorial graduado tal que el i-esimo sumando de $V[n]$ es el sumando $i+n$ de V. En este trabajo trabajaremos con espacios de cadenas C los cuales vienen graduados de manera natural, pero por varias razones tendremos que hacer un cambio en la graduación por un entero n. En ese caso escribiremos $\mathrm{C} = C[n]$, y similarmente para grupos de homología ponemos $\mathrm{H} = H[n]$. El entero n sin embargo varía dependiendo del espacio C en consideración de acuerdo a la convención

$$\mathrm{C}(M^{S(Y)}(N_0, N_1)) = C(M^{S(Y)}(N_0, N_1))[dim(N_1)].$$

Lema 12. Supongamos que $x \in \mathrm{C}(M^{S(Y)}(N_0, N_1))$ y $y \in \mathrm{C}(M^{S(Y)}(N_1, N_2))$ son cadenas transversales. Se tiene que

$$\partial(x \bullet y) = \partial x \bullet y + (-1)^{\bar{x}} x \bullet \partial y.$$

Demostración. Por definición el substrato de la cadena de Y-branas $x \bullet y$ es $K_x \times_{N_1} K_y$. Tenemos que

$$\begin{aligned} K_{x \bullet y} &= K_{e_1(x) \cap e_0(y)} \\ K_{\partial x \bullet y} &= K_{\partial e_1(x) \cap e_0(y)} \\ K_{x \bullet \partial y} &= K_{e_1(x) \cap \partial e_0(y)}. \end{aligned}$$

Recordemos que la intersección transversal de cadenas en una variedad compacta satisface

$$\partial(x \cap y) = \partial x \cap y + (-1)^{\bar{x}} x \cap \partial y.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \partial K_{x \bullet y} &= \partial K_{e_1(x) \cap e_0(y)} \\ &= K_{\partial e_1(x) \cap e_0(y)} \sqcup (-1)^{\bar{x}} K_{e_1(x) \cap \partial e_0(y)} \\ &= K_{\partial x \bullet y} \sqcup (-1)^{\bar{x}} K_{x \bullet \partial y}. \end{aligned}$$

Como $\partial(x \bullet y)$ es la restricción de $x \bullet y$ a $\partial K_{x \bullet y}$ hemos demostrado que

$$\partial(x \bullet y) = \partial x \bullet y + (-1)^{\bar{x}} x \bullet \partial y$$

□

Definición 13. Denotamos por 1_N a la siguiente cadena definida para para cada subvariedad N de M. El dominio de 1_N es N y la aplicación $1_N \colon N \to M^{S(Y)}(N, N)$ está dada por $1_N(p)(s,t) = p$, donde $p \in N$, $t \in [0,1]$ y $s \in Y$.

Proposición 14. La composición $\bullet$ es asociativa y unitaría módulo homotopías.

Demostración. Sean $x \in \mathrm{C}(M^{S(Y)}(N_0, N_1))$, $y \in \mathrm{C}(M^{S(Y)}(N_1, N_2))$ y $z \in \mathrm{C}(M^{S(Y)}(N_2, N_3))$. El dominio de $(x \bullet y) \bullet z$ es $K_{(x \bullet y) \bullet z} = K_x \times_{N_1} K_y \times_{N_2} K_z$. La aplicación $(x \bullet y) \bullet z \colon K_{(x \bullet y) \bullet z} \to M^{S(Y)}(N_0, N_2)$ está dada por

$$(x \bullet y) \bullet z(a,b,c) = \begin{cases} x(a)(s, 4t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ y(b)(s, 4t-1) & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ z(c)(s, 2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Por otro lado el dominio de la cadena $x \bullet (y \bullet z)$ tambien es $K_{x \bullet (y \bullet z)} = K_x \times_{N_1} K_y \times_{N_2} K_z$, y la aplicación $x \bullet (y \bullet z) \colon K_{x \bullet (y \bullet z)} \to M^{S(Y)}(N_0, N_2)$ está dada por

$$x \bullet (y \bullet z)(a,b,c) = \begin{cases} x(a)(s, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ y(b)(s, 4t-2) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ z(c)(s, 4t-3) & \text{si } \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Sea $r \in [0,1]$, una homotopía de $(x \bullet y) \bullet z$ a $x \bullet (y \bullet z)$ está dada por

$$h((a,b,c),r) = \begin{cases} x(a)(s, 4t - 2tr) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1+r}{4} \\ y(b)(s, 4t - r - 1) & \text{si } \frac{1+r}{4} \leq t \leq \frac{2+r}{4} \\ z(c)(s, 2t + 2tr - 2r - 1) & \text{si } \frac{2+r}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Por otra parte la cadena $x \bullet 1_{N_1} \in \mathrm{C}(M^{S(Y)}(N_0, N_1))$ está dada para $a \in K_x$ por

$$x \bullet 1_{N_1}(a) = \begin{cases} x(a)(s, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1_{N_1}(a)(s, 2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Esto es

$$x \bullet 1_{N_1}(a) = \begin{cases} x(a)(s, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ x(a)((s, 1)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Definimos una homotopía de $x \bullet 1_{N_1}$ a $x$de la siguiente manera

$$h((a), r)) = \begin{cases} x(a)(s, 2t - rt) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1+r}{2} \\ 1_{N_1}(a)(s, 2t - tr + r - 1) & \text{si } \frac{1+r}{2} \leq t \leq \frac{2+r}{4} \end{cases}$$

□

Pasamos a considerar los grupos de homología de las Y-branas.

Definición 15. Denotamos por $\mathrm{H}_i(M^{S(Y)}(N_0, N_1))$ al i-esimo grupo de homología del espacio de Y-branas $M^{S(Y)}(N_0, N_1)$ dado por

$$\mathrm{H}_i(M^{S(Y)}(N_0, N_1)) = \frac{\mathrm{Ker}\{\partial\colon \mathrm{C}_i(M^{S(Y)}(N_0, N_1)) \to \mathrm{C}_{i-1}(M^{S(Y)}(N_0, N_1))\}}{Im\{\partial\colon \mathrm{C}_{i+1}(M^{S(Y)}(N_0, N_1)) \to \mathrm{C}_i(M^{S(Y)}(N_0, N_1))\}}.$$

Usamos la notación

$$\mathrm{H}(M^{S(Y)}(N_0, N_1)) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathrm{H}_i(M^{S(Y)}(N_0, N_1)).$$

Llamamos a $\mathrm{H}(M^{S(Y)}(N_0, N_1))$ la homología de Y-branas que se extienden de N_0 a N_1. En el próximo teorema se prueba la asociatividad de la composición

$$\bullet : \mathrm{H}(M^{S(Y)}(N_0, N_1)) \otimes \mathrm{H}(M^{S(Y)}(N_1, N_2)) \to \mathrm{H}(M^{S(Y)}(N_0, N_2))$$

para homologías de Y-branas.

Teorema 16. Dadas subvariedades N_0, N_1, N_2 y N_3, tenemos la siguiente identidad

$$\bullet(1 \otimes \bullet) = \bullet(\bullet \otimes 1) : \mathrm{H}(M^{S(Y)}(N_0, N_1)) \otimes \mathrm{H}(M^{S(Y)}(N_1, N_2)) \otimes \mathrm{H}(M^{S(Y)}(N_2, N_3)) \to \mathrm{H}(M^{S(Y)}(N_0, N_3)).$$

Demostración. Dadas $x \in \mathrm{H}_i(M^{S(Y)}(N_0, N_1))$, $y \in \mathrm{H}_j(M^{S(Y)}(N_1, N_2))$, y $z \in \mathrm{H}_k(M^{S(Y)}(N_2, N_3))$ tenemos que probar que $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$. Ademas queremos ver que $x \bullet 1_{N_1} = x = 1_{N_0} \bullet x$. Veamos primero que la composición $\bullet$ está bien definida en homología. Asumimos que x e y están dados por ciclos, es decir, $\partial x = \partial y = 0$. Queremos demostrar que $x \bullet y = x \bullet (y + \partial z)$, o equivalente $x \bullet y = x \bullet y + x \bullet \partial z$. Por el Lema 12 y usando $\partial x = 0$ tenemos que

$$\partial(x \bullet y) = \partial x \bullet z + (-1)^{\bar{x}} x \bullet \partial z = (-1)^{\bar{x}} x \bullet \partial z,$$

luego la cadena $x \bullet \partial z$ es exacta y por lo tanto nula en homología.

Como la composición $\bullet$ es asociativa en homotopía tenemos que $(x \bullet y) \bullet z$ es homotópica a $x \bullet (y \bullet z)$, y por lo tanto $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$ en homología. Del mismo modo como $x \bullet 1_{N_1}$ es homotópica x, entonces $x \bullet 1_{N_1} = x$ en homología. □

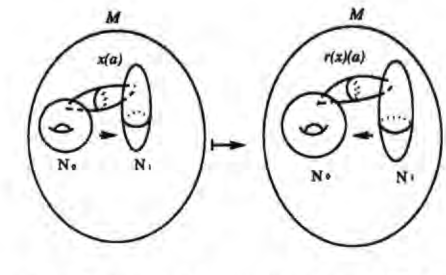

Figura 6: Ejemplo de involución en $\mathrm{H}(M^{S(Y)})$.

Pasamos a definir una involución r en la categoría $\mathrm{H}(M^{S(Y)})$.

)efinición 17. Dada $x\colon K_x \to M^{S(Y)}(N_0, N_1)$ denotamos por $r(x)\colon K_{r(x)} \to M^{S(Y)}(N_1, N_0)$ a la adena dada por $r(x)(a)(s,t) = x(a)(s, 1-t)$, donde $a \in K_x$ y $(s,t) \in Y \times I$.

La Figura 6 representa un ejemplo de involución en la categoría $H(M^{S(Y)})$.
La demostración del siguiente resultado no es difícil y la omitimos.

oposición 18. Sean $x\colon K_x \to M^{S(Y)}(N_0, N_1)$ y $y\colon K_y \to M^{S(Y)}(N_1, N_2)$ cadenas transversales. La olución r satisface las siguientes propiedades

1. $r(x \bullet y) = (-1)^{\overline{x}\overline{y}} r(y) \bullet r(x)$.
2. $r(r(x)) = x$.
3. $r(x + \lambda y) = r(x) + \lambda r(y)$.
4. $r(1_N) = 1_N$.
5. $r(\partial x) = \partial(r(x))$.
6. $\overline{r(x)} = \overline{x}$.
7. $x \bullet r(x) = 1_{N_0}$.
8. $r(x) \bullet x = 1_{N_1}$.

5. Categoría de homologías de Y-branas

En esta sección definimos un nuevo invariante topológico para variedades diferenciales orientadas de dimensión finita. Denotamos por *oman* a la categoría cuyos objetos Ob(*oman*) son variedades suaves orientadas de dimensión finita. Morfismos en *oman*(M, P) son difeomorfismos de M a P que preservan orientación. Recordamos que una categoría diferencial graduada $\mathcal{C}$ sobre un cuerpo k es una categoría tal que

1. $C(x, y)$ es un k-espacio vectorial $\mathbb{Z}$-graduado, para cada $x, y \in \mathrm{Ob}(C)$.
2. Para cada $x, y, z \in \mathrm{Ob}(C)$ la composición $C(x,y) \times C(y,z) \to C(x,z)$ está dada por aplicaciones lineales
$$C(x,y) \otimes C(y,z) \to C(x,z),$$

donde $\otimes$ es el producto tensorial de espacios vectoriales $\mathbb{Z}$-graduados

$$\Big(\bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} A_l\Big) \otimes \Big(\bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} B_l\Big) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \Big(\bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} A_l \otimes B_{n-l}\Big).$$

Denotamos por *g-cat* a la categoría tal que sus objetos son categorías pequeñas graduadas. Morfismos en *g-cat* de la categoría C a la categoría D son funtores $F\colon C \to D$ tales que la aplicación

$$F(x,y)\colon C(x,y) \to D(F(x),F(y))$$

es k-lineal. Nuestro próximo objetivo es construir un funtor

$$\mathrm{H}((\ )^{S(Y)})\colon\ oman \to g\text{-}cat.$$

Definición 19. Para cada $M \in \mathrm{Ob}(oman)$ se construye la categoría graduada $\mathrm{H}(M^{S(Y)}) \in \mathrm{Ob}(g\text{-}cat)$ dada por

1. $\mathrm{Ob}(\mathrm{H}(M^{S(Y)}))$ = subvariedades compactas orientadas embebidas en M.

2. Para N_0 y $N_1 \in \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(M^{S(Y)}))$ definimos

$$\mathrm{H}(M^{S(Y)})(N_0,N_1) = H(M^{S(Y)}(N_0,N_1))[\dim(N_1)].$$

3. La identidad en $\mathrm{H}(M^{S(Y)})(N,N)$ es la clase de homología de la cadena identidad 1_N.

4. Las composiciones se defininen como en la Sección 4.

Para $M, P \in \mathrm{Ob}(oman)$ y $\alpha \in oman(M,P)$ vamos a definir el funtor

$$\mathrm{H}(M^{S(Y)})(\alpha)\colon \mathrm{H}(M^{S(Y)}) \to \mathrm{H}(P^{S(Y)}).$$

Sobre objetos $\mathrm{H}(M^{S(Y)})(\alpha)$ es la aplicación dada por

$$\mathrm{H}(M^{S(Y)})(\alpha)(N) = \alpha(N)$$

para cada $N \in \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(M^{S(Y)}))$.

$\mathrm{H}(M^{S(Y)})(\alpha)$ actúa sobre morfismos en la homología de Y-branas mediante la aplicación

$$\mathrm{H}(M^{S(Y)})\colon \mathrm{H}(M^{S(Y)})(N_0,N_1)) \to \mathrm{H}(P^{S(Y)})(\alpha(N_0),\alpha(N_1))$$

dada por $\mathrm{H}(M^{S(Y)})(x) = \alpha \circ x$ para cada $x \in \mathrm{H}(M^{S(Y)}(N_0,N_1))$.

Teorema 20. La aplicación $\mathrm{H}((\ )^{S(Y)})\colon oman \to g\text{-}cat$ de Definición 19 es functorial.

Demostración. Para cada $N \in \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(M^{S(Y)}))$ sea $1_N \in \mathrm{H}(M^{S(Y)}(N,N))$ el morfismo identidad. Debemos demostrar que

$$\mathrm{H}(M^{S(Y)})(\alpha)(\mathrm{id}_N) = \mathrm{id}_{\alpha(N)} \in \mathrm{H}(P^{S(Y)}(\alpha(N),\alpha(N))),$$

donde $\alpha\colon M \to P$ es un difeomorfismo que preserva la orientación. A nivel de dominios tenemos que

$$K_{\mathrm{H}(M^{S(Y)})(\alpha)(1_N)} = K_{1_{\alpha(N)}} = \alpha(N).$$

La aplicación

$$H(M^{S(Y)})(\alpha)(1_N)\colon K_{1_N} \to M^{S(Y)}(\alpha(N),\alpha(N)),$$

está dada por

$$\mathrm{H}(M^{S(Y)})(\alpha)(1_N)(a)(s,t) = 1_{\alpha(N)}(\alpha(a))(s,t) = \alpha(a),$$

para $a \in N$, $s \in Y$ y $t \in [0,1]$.

Sean $\alpha \in oman(M,P)$ y $\beta \in oman(P,Q)$, debemos probar que

$$\mathrm{H}(M^{S(Y)})(\beta \circ \alpha) = \mathrm{H}(M^{S(Y)})(\beta) \circ \mathrm{H}(M^{S(Y)})(\alpha).$$

De hecho en objetos tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(M^{S(Y)})(\beta \circ \alpha)(N) &= (\beta \circ \alpha)(N) \\
&= \beta(\alpha(N)) \\
&= \mathrm{H}(M^{S(Y)})(\beta) \circ (\alpha(N)) \\
&= \mathrm{H}(M^{S(Y)})(\beta) \circ \mathrm{H}(M^{S(Y)})(\alpha))(N),
\end{aligned}$$

para cada $N \in \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(M^{S(Y)})$. Dadas subvariedades $N_0, N_1 \in \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(M^{S(Y)}))$ y $x \in \mathrm{H}(M^{S(Y)}(N_0, N_1))$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(M^{S(Y)})(\beta \circ \alpha)(x) &= (\beta \circ \alpha)(x) \\
&= \beta(\alpha(x)) \\
&= \mathrm{H}(M^{S(Y)})(\beta) \circ (\alpha(x)) \\
&= (\mathrm{H}(M^{S(Y)}))(\beta) \circ \mathrm{H}(M^{S(Y)})(\alpha))(x)
\end{aligned}$$

□

Concluimos esta sección con algunos ejemplos. Si tomamos Y igual a un punto obtenemos la categoría de las cuerdas abiertas estudiada por Sullivan [22]. Explicitamente, si fijamos una variedad diferencial compacta orientada M, consideramos N_0 y N_1 subvariedades compactas orientadas embebidas en M. Denotamos por I al intervalo unitario $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, con puntos marcados 0 y 1. Consideramos el espacio topológico $M^I(N_0, N_1)$ de las cuerdas abiertas que se extienden de N_0 a N_1, es decir

$$M^I(N_0, N_1) = \left\{ \gamma \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma\colon I \to M,\ \gamma(0) \in N_0,\ \gamma(1) \in N_1 \\ \gamma \text{ es constante en entornos de 0 y 1} \end{array} \right\}.$$

La composición $\bullet$ nos permiter componer cadenas transversales. Dadas $x \in \mathrm{C}(M^I(N_0, N_1))$ una cadena de cuerdas abiertas que se extienden de N_0 a N_1 y $y \in \mathrm{C}(I(N_1, N_2))$ una cadena de cuerdas abiertas que se extienden de N_1 a N_2, tal que los puntos marcados finales de x se intersectan transversalmente con los puntos marcados iniciales de y, entonces obtenemos la cadena $x \bullet y$. La composición $\bullet$ es asociativa módulo homotopías e induce una composición $\bullet$ asociativa en homología

$$\bullet\colon \mathrm{H}(M^I(N_0, N_1)) \otimes \mathrm{H}(M^I(N_1, N_2)) \to \mathrm{H}(M^I(N_0, N_2)).$$

Obtenemos de esta la categoría graduaduada $\mathrm{H}(M^I)$ de homologías de cuerdas en M.

Similarmente, sea $Y = S^{n-1}$ la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$. Es fácil ver que en este caso $S(Y) = S^n$, la n-esfera con dos puntos marcados, el polo norte N y el polo sur S. Dadas N_0 y N_1 subvariedades compactas orientadas embebidas en M, consideramos el espacio topológico de las S^{n-1}-branas que se extienden de N_0 a N_1, es decir

$$M^{S^n}(N_0, N_1) = \left\{ \gamma \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma\colon S^n \to M,\ \gamma(S) \in N_0,\ \gamma(N) \in N_1, \\ \gamma \text{ es constante en entornos de S y N} \end{array} \right\}.$$

Como en el caso general se puede definir la composición $\bullet$ para cadenas de S^{n-1}-branas que se intersectan transversalmente, y obtener de este modo la categoría de homologías de n-esferas en M.

6. Comentarios finales

Este trabajo se enmarca dentro del contexto del estudio de las aplicaciones de la teoría de categorias a las más variadas ramas de las matemáticas. La importancia de el punto de vista catégorico no es fácil de apreciar en una primera instancia. Sin embargo la profundidad y alcance de los númerosos trabajos influenciados por dicha concepción, ver por ejemplo los artículos [1, 4, 5, 2, 3, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18], experimenta un crecimiento sostenido que uno puede predecir que se hará incluso más intenso en los años por venir. En este trabajo discutimos algunos tópicos originados en la física teórica, primero con herramientas de topología algebraica clásica y luego introduciendo de forma gradualmente un lenguaje que resalta los aspectos categóricos de nuestras construcciones. Quedan por estudiar varias posibles generalizaciones e interpretaciones de los resultados presentados en este trabajo. Por ejemplo, sería interesante definir nuestras categorías $\mathrm{H}(M^{S(Y)})$ para espacios M con singularidades. De hecho Lupercio y Uribe en [19] estudian el caso de lazos en orbidades globales. Muy probablemente nuestros métodos puedan generalizarse al caso donde M es una variedad estratificada apropiada. Hasta la fecha este problema no ha sido considerado en la literatura pero los resultados de este trabajo sugieren que quizas valga la pena prestarle mayor atención. Tambien es interesante ver que estructuras algebraicas se obtienen si se trabaja a nivel de cadenas $\mathrm{C}(M^{S(Y)})$ sin descender a homología. En [7, 8] hemos estudiado este problema y hemos demostrado usando operads que las cadenas de Y-branas forman una 1-categoría transversal con traza. El lector encontrará en [6, 9] otras construcciones relacionadas con el presente trabajo.

Agradecimiento

Expresamos nuestra gratitud hacia el Profesor Raymundo Popper.

Referencias

[1] M. Atiyah, Topological quantum field theory, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 68 (1988) 175-186.

[2] J. Baez, J. Dolan, From finite set to Feynman diagrams, en B. Engquist, W. Schmid (Eds.), Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond, Springer, Berlin, 2001, pp. 29-50.

[3] J. C. Baez, J. Dolan, Categorification, en E. Getzler, M. Kapranov (Eds.), Higher category theory, Evanston, IL, 1997, Contemp. Math., vol. 230, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 1-36.

[4] H. Blandín, R. Díaz, On the combinatorics of hypergeometric functions, Adv. Stud. Contemp. Math. 14 (1) (2007) 153-160.

[5] H. Blandín, R. Díaz, Rational combinatorics, Adv. in Appl. Math. (2007), doi:10.1016/j.aam.2006.12.006.

[6] E. Castillo, R. Díaz, Homology and manifolds with corners, prepublicación, arXiv.math.GT/0611839.

[7] E. Castillo, R. Díaz, Homological matrices, en S. Paycha, B. Uribe (Eds.), Geometric and Topological Methods for Quantum Field Theory, Contemp. Math. 432, Amer. Math. Soc., Providence, pp. 181-192, 2007.

[8] E. Castillo and R. Díaz, Homological quantum field theory, prepublicación, arXiv.math.KT/0509532.

[9] E. Castillo, R. Díaz, Membrane Topolgy, Adv. Stud. Contemp. Math. 15 (1) (2007) 59-68.

[10] E. Castillo, R. Díaz, Rota-Baxter categories, prepublicación, arXiv:math/0612218.

[11] M. Chas, D. Sullivan, String Topology, prepublicación, arXiv.math.GT/9911159.

[12] J. Christensen, L. Crane, Causal sites as quantum geometry, J. Math. Phys. 46 (2005) 122502.

[13] L. Crane, I. Frenkel, Four-dimensional topological quantum field theory, Hopf categories, and the canonical bases, J. Math. Phys. 35 (10) (1994) 5136-5154.

[14] L. Crane, D. Yetter, Examples of categorification, Gahiers Topologie Géom. Defférentielle Catég. 39 (1) (1998) 3-25.

[15] R. Díaz, E. Pariguan, Super, quantum and noncommutative species, prepublicación, arXiv: math.CT/0509674.

[16] M.G. Khovanov, A categorification of Jones polynomial, Duke Math. J. 143 (2) (1986) 288-348.

[17] T. Kimura, Topological Quantum Field Theory and Algebraic Structures, en Lecture Notes in Phys. 662, Springer, Berlin, 2005, pp. 255-287.

[18] T. Kimura, J. Stasheff, A. Voronov, On operads structures of moduli spaces and string theory, Comm. Math. Phys. 171 (1) (1995) 1-25.

[19] E. Lupercio, B. Uribe, Topological Quantum Field Theories, en S. Paycha, B. Uribe (Eds.), Geometric and Topological Methods for Quantum Field Theory, Contemp. Math. 432, Amer. Math. Soc., Providence, pp. 73-98, 2007.

[20] J. D. Stasheff, Homotopy associativity of H-spaces I, Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963) 275-292.

[21] J. D. Stasheff, Homotopy associativity of H-spaces II, Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963) 293-312.

[22] D. Sullivan, Open and closed string theory interpreted in classical algebraic topology, en Topology, Geometry and Quantum Field Theory, London Math. Soc. Lecture Notes 308, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004, pp. 344-357.

[23] E. Witten, Non-commutative geometry and string field theory, Nuclear Phys. B 268 (1986) 253-294.

[24] E. Witten, B. Zwiebach, Algebraic structures and differential geometry in two-dimensional string theory, Nuclear Phys. B 377 (1992) 55-112.

[25] B. Zwiebach, Closed string field theory: quantum action and the BV master equation, Nuclear Phys. B 390 (1993) 33-152.

ecastill@euler.ciens.ucv.ve
Escuela de Matemáticas, Universidad Central de Venezuela, Caracas 1020, Venezuela.

ragadiaz@gmail.com
Grupo de Física-Matemática, Universidad Experimental de las Fuerzas Armadas, Caracas 1010, Venezuela.