



Artículo de investigación original

Método para la valoración de eficiencia usando Análisis Envolvente de Datos en ambiente borroso

DMU efficiency assessment using Data Envelopment Analysis in fuzzy environment

Harizmar Izquierdo Madrid^a, Belkys López de Lamedada^b, María Elena Torres-Samuel^a,
Ennodio Torres Cruz^b

^aUniversidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Departamento de Sistemas, Barquisimeto, Venezuela

^bUniversidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Departamento de Matemáticas, Barquisimeto, Venezuela

Recibido: 07-04-2016

Aceptado: 18-01-2017

Resumen

El presente artículo tiene como objetivo el desarrollo de un método, basado en la lógica borrosa, para la valoración de la eficiencia de unidades de decisión (Decision Making Unit, DMU) usando Análisis Envlovente de Datos (Data Envelopment Analysis, DEA), para el manejo de datos imprecisos. Se aplica el enfoque basado en alfa-cortes para calcular la eficiencia y seguidamente se ordenan los números borrosos obtenidos. El método desarrollado utiliza los datos referentes al servicio de un sistema hospitalario, con doce DMU a efecto de probar la utilidad del método. Este trabajo muestra una visión de la valoración y clasificación de las DMU bajo incertidumbre, útil para el proceso de toma de decisiones.

Palabras clave: Eficiencia, análisis envolvente de datos, ambiente borroso.

Código UNESCO: 1207.09

Abstract

The objective of this paper is to develop a method based on fuzzy logic for the evaluation of the efficiency of decision units (Decision Making Unit, DMU) using Data Envelopment Analysis (DEA) for the handling of inaccurate data. The Alpha-cut approach is used for efficiency assessment, and the obtained fuzzy parameters are then sorted. For the evaluation of the method's usefulness, the data of a Hospital system and twelve DMU's were used. This research proposes an approach for the valuation and classification of DMU's, useful for the decision making process.

Keywords: Efficiency, data envelopment analysis, fuzzy environment.

UNESCO Code: 1207.09

1. INTRODUCCIÓN

En un contexto de mercados competitivos, se espera que las fuerzas de la competencia lleven naturalmente a la eficiencia, como una consecuencia del postulado teórico de maximización de beneficios. La teoría económica supone habitualmente que las empresas se fijan esa meta, y la no observación de dicho supuesto en un mercado competitivo no asegura la sustentabilidad empresarial. La eficiencia se trata cuantitativamente con el cálculo comparativo del cociente

entre los productos y los insumos de varias unidades de decisión, las cuales pueden ser empresas, hospitales, escuelas, municipios y cualquier entidad en la que se procesen insumos o recursos para generar producto o servicios [1]. Por otra parte, Gutiérrez [2] define eficiencia como la relación entre el resultado alcanzado y los recursos utilizados, siendo un factor determinante en la competitividad [3].

Para estudiar la eficiencia existen varios métodos, algunos de éstos suponen que los planes de producción se conocen con precisión y se desarrollan bajo la hipótesis de que los valores de las entradas y las salidas son determinados con certeza; uno de estos es el DEA nítido, que permite analizar las fronteras de producción y proporciona una medida de la eficiencia productiva, sus orígenes pueden establecerse en el trabajo de Charnes et al. [4]. No obstante en la práctica empresarial muchos procesos de producción involucran entradas y salidas que son difíciles de medir de una forma precisa, tal es el caso del establecimiento de estrategias de producción para obtener un portafolio de productos más rentables y de interés del mercado consumidor, como el presentado por Da Silva et al. [5], el cual requiere una metodología que permite el tratamiento de datos imprecisos.

En el mundo real, la incertidumbre puede presentarse de diversas formas. Si se refiere a la vaguedad inherente a la descripción del significado semántico de los hechos, se aborda la incertidumbre borrosa [6]. Por otra parte, la incertidumbre estocástica se refiere a una falta de información sobre el estado futuro del sistema. Estos dos tipos de incertidumbre aparecen especialmente en las áreas en las que el juicio humano, la evaluación y la decisión son imprescindibles, tal y como sucede en toda actividad empresarial [7].

La teoría de conjuntos borrosos es un instrumento eficaz y riguroso para solucionar los problemas en los que la fuente de imprecisión está en la medición de las entradas y salidas de los procesos de producción. En este sentido, el problema de decisión en el mundo real se plantea, a veces, en ambientes donde los objetivos, las restricciones e incluso las consecuencias de las acciones no se conocen con exactitud [6], y esto es relativamente frecuente cuando se intenta modelar sistemas en los que se incluyen aspectos humanos.

Para el caso de la eficiencia, los métodos utilizados para medirla se pueden clasificar atendiendo a un enfoque paramétrico, que exige conocer una ecuación para la función de producción [8] [9], o siguiendo un enfoque no paramétrico, en el que no se requiere conocer una función de producción que la describa, y las estimaciones se obtienen a partir de técnicas de programación matemática (normalmente lineal). Entre los métodos no paramétricos más utilizados para la medición de la eficiencia se encuentra el Análisis Envoltante de Datos (en adelante DEA, por sus siglas en inglés) resultante de una extensión del trabajo de Farrell [10], el cual proporciona una medida satisfactoria de la eficiencia productiva. DEA se considera una herramienta de decisión, puesto que facilita el análisis de información respecto a la eficiencia de las DMU analizadas favoreciendo la formulación de acciones correctivas para optimizar los recursos utilizados en la producción de un bien o servicio.

Por otra parte, Charnes et al. [4] propusieron un modelo lineal conocido como DEA-CCR o modelo DEA con rendimientos constantes a escala con orientación a las entradas, también conocido como el modelo multiplicador. Banker et al. [11] extendieron este modelo a otro conocido como DEA-BCC o modelo DEA con rendimientos variables de escala, debido a que a un mayor nivel de producción o escala de operaciones puede verificarse que la unidad productiva exhiba un mayor nivel de eficiencia, derivado del aprovechamiento de las economías de escala. Autores como Rotela et al. [12] muestran que el DEA se ha destacado entre las técnicas de modelado cuantitativas que apoyan a los gerentes en la toma de decisiones en diversas áreas, tales como bancos, universidades y hospitales.

El presente trabajo tiene como objetivo el desarrollo de un método para la valoración de la eficiencia de las DMU usando DEA, considerando que los datos a manejar son imprecisos. En la primera parte del trabajo, se desarrollan los fundamentos teóricos que sustentan la investigación; seguidamente se expone la metodología utilizada para el análisis de la eficiencia; se describe el método propuesto para la valoración y ordenamiento, posteriormente se ilustra su aplicación empleando datos seleccionados de una investigación publicada. Finalmente se presentan los resultados obtenidos, el análisis de los mismos, y se exponen las conclusiones de la investigación.

2. DESARROLLO

Los problemas del mundo real pueden ser complejos y, por lo tanto no pertinentes para ser enfrentados con un modelo tradicional y paramétrico. Esto se hace más palpable en el ámbito de la economía de negocios, donde la mayoría de los empresarios toman sus decisiones basados en esquemas “no cuantitativos” o “subjetivos” [13]. Castiblanco [14] refiere que se necesitan nuevas herramientas basadas en metodologías para la toma de decisiones que aborden el manejo de variables de tipo subjetivas, parcialmente desconocidas o inciertas; enfatizando que el manejo de la posibilidad, de la ambigüedad, de lo incierto y de la subjetividad han encontrado un sustento teórico matemático en la lógica borrosa, ya que ésta permite el diseño de modelos capaces de incorporar la vaguedad, la ambigüedad asociada con el proceso de

toma de decisiones en ambientes de incertidumbre. Por ello el autor antes citado presenta un ejemplo donde usa la lógica borrosa en la toma de decisiones aplicado en el área de Recursos Humanos para la selección de personal.

Análisis Envolvente de Datos (DEA)

El DEA posibilita estimar el nivel de eficiencia relativa de una empresa o unidad de producción respecto al resto de unidades que se evalúan simultáneamente, por lo que los resultados obtenidos no se expresan en términos de eficiencia absoluta sino que permiten conocer aquellas unidades que realizan la mejor asignación de recursos en comparación al resto de las unidades de la muestra. Las unidades eficientes se sitúan en lo que se denomina frontera de producción, esto es, la combinación idónea de entradas para un determinado nivel de producción o la combinación idónea de salidas para unos niveles de recurso [15].

Tanto Kao y Liu [16] como Guo y Tanaka [17] señalan que en los modelos DEA el tratamiento de la incertidumbre puede hacerse desde planteamientos estocásticos o bien desde planteamientos borrosos. Con respecto al planteamiento estocástico, Olesen y Petersen [18] refieren que se debe justificar alguna distribución de probabilidad sobre el error cometido en los datos o en las ineficiencias. No obstante, estos condicionamientos no son requeridos por el planteamiento borroso, cuya metodología es flexible para abordar y tratar diferentes y variadas situaciones complejas del mundo real, además de ofrecer una visión más completa de la valoración y clasificación de las DMU bajo incertidumbre y esto puede ser útil para el complejo proceso de tomar decisiones, en el cual no es suficiente conocer si la empresa usa los recursos de manera más eficiente, sino que también se necesita establecer una clasificación de las empresas a partir de la ordenación borrosa de sus eficiencias; esta información es útil como una primera aproximación al estudio de la competitividad relativa entre las empresas [19].

Modelo DEA borroso

Hatami-Marbini et al. [20] realizaron una extensa revisión de la literatura sobre la teoría de conjuntos borrosos vinculada con los modelos DEA. La motivación de estos autores se basó sobre la estimación de valores de entradas y salidas de las DMU en los problemas reales, es difícil y puede generar valores de eficiencia con baja fiabilidad, y un enfoque posible para hacer frente a estos aspectos de la incertidumbre en datos, sería la adopción de los conceptos de la teoría de conjuntos borrosos. Corroborando [20] y [16], la medición de la eficiencia de una DMU involucra variables económicas complejas, tales como tasas de interés, los impuestos, el empleo, entre otras. Esta tarea se complica al considerar múltiples entradas y salidas en un ambiente de incertidumbre, es por ello que la teoría de conjuntos borrosos se ha utilizado como un sistema de inferencia borrosa para modelar tal situación; es decir un sistema que modela funciones no lineales teniendo unas variables lingüísticas de entrada, las cuales se convierten en variables de salida, mediante la lógica borrosa [21].

A continuación se proporciona una clasificación y revisión de los enfoques del modelo DEA borroso, presentados por distintos autores en los últimos veinte años:

- a) Enfoque de tolerancias [22] [23] [24];
- b) Enfoque basado en α -cortes [16];
- c) Enfoque de posibilidad [25];
- d) Enfoque de clasificación borrosa [26];
- e) Enfoque de oportunidad colaborativa [27];
- f) Enfoque basado en tiempo de retardo [28];
- g) Enfoque con análisis de sustentabilidad [29];
- h) Enfoque basado en serie de tiempo borroso [30];
- i) Enfoque basado en α -niveles [31].

Metodología

En este trabajo se adopta el enfoque basado en α -cortes y el modelo DEA borroso para analizar la eficiencia; Esmaeili y Sadegh [32] aplican el modelo DEA borroso para determinar el índice de eficiencia, con base a la conversión borrosa del modelo DEA a un modelo de programación lineal por el método de α -cortes, este método cuya idea según Lertworasirikul et al. [25] es convertir el modelo DEA borroso en un par de problemas de programación paramétrica y encontrar el límite superior e inferior de las funciones de pertenencia de los índices de eficiencia de las DMU, adicionalmente se optó por el uso de las funciones de pertenencia triangular, por ser ampliamente utilizadas para representar el rango de valores aproximados de las variables lingüísticas [33]. Aouni et al. [34] mostraron varias aplicaciones de números borrosos triangulares que validan y justifican la adopción de este método junto con los modelos de programación

por objetivos (GP, por las siglas del nombre en inglés *Goal Programming*). Otra razón es que la función de pertenencia triangular es lineal, lo cual facilita su optimización a través de los métodos tradicionales de programación lineal [20].

En el enfoque convencional de DEA, se selecciona un conjunto de pesos que satisfacen restricciones para dar la medida de eficiencia más alta posible para cada DMU. Cuando algunas observaciones son borrosas, el objetivo y las restricciones en el proceso de decisión se convierten en borrosas también. La idea básica utilizada por Kaufmann [35] consiste en aplicar α -cortes a partir del principio del extensión de Zadeh [36] [37] [38] [39] para transformar el modelo DEA borroso en una serie de modelos convencionales. Los modelos convencionales se resuelven mediante la programación lineal en la versión dual del problema, versión más utilizada en economía puesto que su resolución es simple al utilizar diversos programas informáticos.

El enfoque propuesto para la construcción de la función de pertenencia μ_{E_i} consiste en obtener los α -cortes de μ_{E_i} , siguiendo a [16], la estructura de los α -cortes es acotada; por lo tanto para construir la función de pertenencia μ_{E_i} es suficiente encontrar el límite inferior y el límite superior del conjunto de los α -cortes. En otras palabras, se describe la función de pertenencia dada anteriormente mediante los α -cortes

$$(\forall \alpha \in \llbracket 0, 1 \rrbracket) [E_i(\alpha) = \llbracket E_i^L(\alpha), E_i^U(\alpha) \rrbracket] \quad (2.1)$$

Los extremos de los intervalos se obtienen mediante los dos programas lineales siguientes:

- 1) Calcular la eficiencia en el caso desfavorable o pesimista corresponde al extremo inferior del intervalo. En este caso, se suponen mayores entradas y menores salidas para la unidad de decisión objetivo $(DMU)_0$, y lo contrario para las otras m unidades de decisión $(DMU)_i$ cada una de las cuales tiene n entradas y p salidas del mismo tipo. El cálculo se realiza a través de α -cortes, para $\forall \alpha \in \llbracket 0, 1 \rrbracket$, y se obtiene $E_i^L(\alpha)$ usando el siguiente modelo:

Maximizar

$$E_i = \sum_{k=1}^p v_k (Y_{0k} - \alpha Z_{0k}) + c_{0k} \quad (2.2)$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^n u_j (Y_{0j} - \alpha W_{0j}) = 1 \quad (2.3)$$

$$(\forall i \in \mathbb{N}_{[1,m]}) \left[\sum_{k=1}^p v_k (Y_{ik} - \alpha Z_{ik}) + c_{0k} \leq \sum_{j=1}^n u_j (X_{ij} + \alpha W_{ij}) \right] \quad (2.4)$$

$$(\forall j \in \mathbb{N}_{[1,n]}) [u_j \geq 0] \quad (2.5)$$

$$(\forall k \in \mathbb{N}_{[1,p]}) [v_k \geq 0] \quad (2.6)$$

donde:

- E_i es la función lineal a maximizar;
- $(Y_{01}, Y_{02}, \dots, Y_{0p})$ es el vector de las cantidades de salida;
- $(Z_{01}, Z_{02}, \dots, Z_{0p})$ es el vector de las restricciones de salida;
- v_k es el peso de la k -ésima salida;
- c_{0k} es una variable auxiliar sin restricciones insertada para ajustar la escala;
- $(X_{01}, X_{02}, \dots, X_{0n})$ es el vector de las cantidades de entrada;
- $(W_{01}, W_{02}, \dots, W_{0n})$ es el vector de las restricciones de entrada;

- u_j es el peso de la j -ésima entrada;
- X_{ij} es la variable cuyo estado es el número borroso que representa la j -ésima entrada utilizada por la i -ésima unidad de decisión (DMU) $_i$;
- W_{ij} es la variable cuyo estado es el número borroso que representa la j -ésima restricción de entrada para la i -ésima unidad de decisión (DMU) $_i$;
- Y_{ik} es la variable cuyo estado es el número borroso que representa la k -ésima salida generada por la i -ésima unidad de decisión (DMU) $_i$;
- Z_{ik} es la variable cuyo estado es el número borroso que representa la k -ésima restricción de salida para la i -ésima unidad de decisión (DMU) $_i$;
- la suma y el producto en la proposición (2.4) son operaciones de la aritmética borrosa;
- el signo \leq en la proposición (2.4) denota una relación de orden entre dos números borrosos;
- $\mathbb{N}_{[1,m]} = \{1, 2, 3, \dots, m\}$; $\mathbb{N}_{[1,n]} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$; $\mathbb{N}_{[1,p]} = \{1, 2, 3, \dots, p\}$; y
- $\llbracket 0, 1 \rrbracket = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$.

2) Calcular la eficiencia en el denominado caso favorable u optimista corresponde al extremo superior del intervalo. En este caso, se suponen menores entradas y mayores salidas para la unidad decisional objetivo (DMU) $_0$ y lo contrario para las otras m unidades decisionales (DMU) $_i$ cada una de las cuales tiene n entradas y p salidas del mismo tipo. El cálculo se realiza a través de α -cortes, para $\alpha \in \llbracket 0, 1 \rrbracket$, y se obtiene $E_i^U(\alpha)$ usando el siguiente modelo:

Maximizar

$$E_i = \sum_{k=1}^p v_k(Y_{0k} + \alpha Z_{0k}) + c_{0k} \quad (2.7)$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^n u_j(Y_{0j} - \alpha W_{0j}) = 1 \quad (2.8)$$

$$(\forall i \in \mathbb{N}_{[1,m]}) \left[\sum_{k=1}^p v_k(Y_{ik} - \alpha Z_{ik}) + c_{0k} \leq \sum_{j=1}^n u_j(X_{ij} - \alpha W_{ij}) \right] \quad (2.9)$$

$$(\forall j \in \mathbb{N}_{[1,n]}) [u_j \geq 0] \quad (2.10)$$

$$(\forall k \in \mathbb{N}_{[1,p]}) [v_k \geq 0] \quad (2.11)$$

Con este método, cuando alguno de los datos de entrada o salida es borroso se obtendrán las medidas de eficiencia como un conjunto borroso para cada una de las DMU. De esta forma, dispondremos de m conjuntos borrosos $\{E_i\}_{i=1}^m$. Chen y Klein [40] propusieron el siguiente índice para ordenar números borrosos:

$$(\forall j \in \mathbb{N}_{[1,n]}) \left[I_j = \frac{\sum_{i=1}^m (E_j^U(\alpha_i) - c)}{\sum_{i=1}^m (E_j^U(\alpha_i) - c) - \sum_{i=1}^m (E_j^L(\alpha_i) - d)} \right] \quad (2.12)$$

donde:

$$c = \min \{E_{jK}^L(\alpha_i) : i \in \mathbb{N}_{[1,m]} \wedge k \in \mathbb{N}_{[1,p]}\} \wedge d = \max \{E_{jK}^U(\alpha_i) : i \in \mathbb{N}_{[1,m]} \wedge k \in \mathbb{N}_{[1,p]}\} \quad (2.13)$$

De acuerdo con [16] se puede establecer la siguiente ordenación:

$$E_j > E_k \Leftrightarrow I_j > I_k. \quad (2.14)$$

De esta manera se ordena a las unidades de decisión según su eficiencia.

Para convertir el modelo DEA borroso en problemas de programación paramétrica y encontrar el límite superior y el límite inferior, se utilizó el sistema GAMS (*General Algebraic Modeling System*®), a diferencia de otros sistemas para implementación de algoritmos matemáticos que permiten resolver los problemas de optimización.

3. RESULTADOS

Descripción del método propuesto para la valoración y ordenamiento de la eficiencia en ambiente borroso

A continuación se describe la aplicación del enfoque basado en α -cortes a partir de [36] y el enfoque de clasificación borrosa desde el planteamiento de León et al. [41]; usando el software GAMS para resolver tantos problemas de programación lineal como DMU existan.

Para iniciar el desarrollo del método propuesto, basado en el algoritmo del modelo BCC en ambiente borroso, se requiere el cálculo en los dos casos posibles: pesimista y optimista. A continuación se detallan los pasos para el cálculo en ambos casos:

PASO 1. En el caso pesimista, seleccionar los valores mínimos para las entradas, y los valores máximos para las salidas; considerando, respecto de las entradas, su variación mínima, y respecto de las salidas, su variación máxima.

PASO 2. Introducir el modelo BCC para calcular la eficiencia pesimista, empleando la ecuación (2.2).

PASO 3. Establecer los valores α para los α -cortes de los números borrosos.

PASO 4. El modelo se resuelve para la DMU 1 y así sucesivamente para cada una de las DMU, utilizando el código desarrollado en el software seleccionado.

PASO 5. Se obtienen las eficiencias para el caso pesimista en función de la variación del parámetro α .

PASO 6. En el caso optimista, seleccionar los valores máximos para las entradas, y los valores mínimos para las salidas; considerando, respecto de las entradas, su variación mínima y respecto de las salidas, su variación máxima.

PASO 7. Introducir el modelo BCC para calcular la eficiencia optimista, empleando la ecuación (2.7).

PASO 8. Se repite el PASO 3 y luego se repite el PASO 4.

PASO 9. Se obtienen las eficiencias para el caso optimista en función de la variación del parámetro α .

PASO 10. Se integran en un cuadro los valores obtenidos en el caso pesimista (PASO 5) y en el caso optimista (PASO 9), con el fin de utilizarlos en el cálculo del índice de eficiencia de [40].

PASO 11. Con los datos obtenidos en los casos optimista y pesimista de cada una de las DMU, se emplea la ecuación (2.12) para calcular el índice Chen-Klein.

Aplicación del método propuesto

El Cuadro 1 muestra las entradas y salidas empleadas en el estudio de la eficiencia. Los datos fueron obtenidos de [42], el cual determina la eficiencia en la prestación de servicio de un sistema hospitalario. Para efectos de desarrollar la metodología se denominaron las variables de entrada como Entrada 1, Entrada 2 y las variables de salida como Salida 1 y Salida 2.

Posteriormente, se analizan los resultados obtenidos en el modelo DEA borroso con el software GAMS para resolver tantos problemas de programación lineal como DMU existan; luego de esto, se analizan los resultados obtenidos en el modelo DEA borroso.

PASO 1. En el caso pesimista, seleccionar los valores mínimos para las entradas, que en el código GAMS se etiquetan ENTRADAS y los valores máximos para las salidas, etiquetados SALIDAS; considerando, respecto de las entradas, su variación mínima etiquetada ALFA, y respecto de las salidas, su variación máxima etiquetada ALFA2.

PASO 2. Introducir el modelo BCC utilizando la ecuación (2.2) con los datos de [42] para calcular la eficiencia pesimista empleando el software GAMS Versión 24.5.6 y MS Excel.

PASO 3. Establecer los valores α para los α -cortes de los números borrosos, que en nuestro caso son: 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.

PASO 4. El modelo se resuelve empleando el siguiente código en GAMS para la DMU 1 y así sucesivamente para cada una de las DMU.

```
FUNCION1.. Z=E=SUM((U),Y(U)*(SALIDAS(U,'1')-ALFAS2(U,'1')*P("ALFA")))+C0;
```


Cuadro 1. Entradas y Salidas de las DMU

DMU	Entrada 1	Entrada 2	Salida 1	Salida 2
1	(18,20,22)	(149,151,153)	(98,100,102)	(88,90,92)
2	17,19,21)	(129,131,133)	(148,150,152)	(48,50,52)
3	(23,25,27)	(158,160,162)	(158,160,162)	(53,55,57)
4	(25,27,29)	(166,168,170)	(178,180,182)	(70,72,74)
5	(20,22,24)	(156,158,160)	(92,94,96)	(64,66,68)
6	(53,55,57)	(253,255,257)	(228,230,232)	(88,90,92)
7	(31,33,35)	(233,235,237)	(218,220,222)	(86,88,90)
8	(29,31,33)	(204,206,208)	(150,152,154)	(78,80,82)
9	(28,30,32)	(242,244,246)	(188,190,192)	(98,100,102)
10	(48, 50,52)	(266,268,270)	(248,250,252)	(98,100,102)
11	(51,53,55)	(304,306,308)	(258,260,262)	(145,147,149)
12	(36,38,40)	(282,284,286)	(248,250,252)	(118,120,122)

Fuente: Cooper, Selford y Tone (2007)

CAL('1').. SUM((V),X(V)*ENTRADAS(V,'1')+ALFAS(V,'1')*P("ALFA"))=E=1;
 CALCULO('1').. SUM((U),Y(U)*SALIDAS(U,'1')-ALFAS2(U,'1')*P('ALFA'))-
 SUM((V),X(V)*ENTRADAS(V,'1')+ALFAS(V,'1')*P('ALFA'))+C0=L=0;
 ND.. SUM((U),Y(U))=G= 0.000001;
 AD.. SUM((V),X(V))=G= 0.000001.

PASO 5. Se obtienen las eficiencias para el caso pesimista en función de la variación del parámetro α .

PASO 6. En el caso optimista, seleccionar los valores máximos para las entradas, etiquetados ENTRADAS, y los valores mínimos para las salidas, etiquetados SALIDAS; considerando, respecto de las entradas, su variación mínima etiquetada ALFA, y respecto de las salidas, su variación máxima etiquetada ALFA2.

PASO 7. Introducir el modelo BCC para calcular la eficiencia optimista con el software GAMS Versión 24.5.6 y MS Excel, de acuerdo a la ecuación (2.7).

PASO 8. Se repite el PASO 3.

PASO 9. El modelo se resuelve empleando el siguiente código para el cálculo de la DMU 1 y así sucesivamente para cada una de las DMU.

FUNCION1.. Z=E=SUM((U),Y(U)*(SALIDAS(U,'1')+ALFAS2(U,'1')*P("ALFA")))+C0;
 CAL('1').. SUM((V),X(V)*ENTRADAS(V,'1')-ALFAS(V,'1')*P("ALFA"))=E=1;
 CALCULO('1').. SUM((U),Y(U)*SALIDAS(U,'1')+ALFAS2(U,'1')*P('ALFA'))-
 SUM((V),X(V)*ENTRADAS(V,'1')-ALFAS(V,'1')*P('ALFA'))+C0=L=0;
 ND.. SUM((U),Y(U))=G= 0.000001;
 AD.. SUM((V),X(V))=G= 0.000001.

PASO 10. Se obtienen las eficiencias para el caso optimista en función de la variación del parámetro α .

PASO 11. Se integran en el Cuadro 2 los valores obtenidos en el caso pesimista (PASO 5) y en el caso optimista (PASO 10), con el fin de utilizarlos en el cálculo del índice de eficiencia de [40]. El resultado del cálculo se muestra a continuación:

La obtención de los intervalos resultantes para cada DMU (2) con cada nivel alfa, proporcionan mayor información sobre la eficiencia de una DMU dada. Es oportuno señalar que los valores de los índices respectivos no son útiles cuando se trata de clasificar las DMU de acuerdo a su eficiencia, ya que no es éste el significado que tienen; siendo en realidad un coeficiente de magnitud para establecer preferencias entre las DMU. A partir de los resultados obtenidos en el Cuadro 2, en el paso 12 se ordenan las DMU teniendo en cuenta sus índices de eficiencia.

Con los datos obtenidos en los casos optimista y pesimista de cada una de las DMU, se emplea la ecuación (2.12) para calcular el índice Chen-Klein, considerando $c= 0.7950$ y $d = 1$, con lo cual se obtienen los siguientes índices de Chen-Klein para las doce DMU, como se muestran en el Cuadro 3

Interpretación de resultados

Los resultados muestran eficiencia igual a 1 (cien por ciento) en siete unidades de decisión; y las restantes DMU son ordenadas de acuerdo a Kao y Liu [16] con el fin de conocer el cociente de eficiencia de cada una, para poder tomar

Cuadro 2. Valores obtenidos para cada DMU, caso pesimista E^L , caso optimista E^U

	1		2		3		4		5		6	
Alfa	E^L	E^U	E^L	E^U	E^L	E^U	E^L	E^U	E^L	E^U	E^L	E^U
0	1	1	1	1	0.895	0.8971	1	1	0.878	0.892	0.9385	1
0.1	1	1	1	1	0.895	0.8970	1	1	0.878	0.891	0.9385	1
0.2	1	1	1	1	0.895	0.8969	1	1	0.879	0.890	0.9386	1
0.3	1	1	1	1	0.895	0.8948	1	1	0.879	0.879	0.9386	1
0.4	1	1	1	1	0.895	0.8966	1	1	0.879	0.888	0.9386	1
0.5	1	1	1	1	0.895	0.8965	1	1	0.879	0.887	0.9387	1
0.6	1	1	1	1	0.895	0.8964	1	1	0.879	0.886	0.9387	1
0.7	1	1	1	1	0.895	0.8962	1	1	0.879	0.885	0.9388	1
0.8	1	1	1	1	0.896	0.8961	1	1	0.880	0.884	0.9388	1
0.9	1	1	1	1	0.896	0.8960	1	1	0.881	0.883	0.9389	1
1	1	1	1	1	0.896	0.8958	1	1	0.882	0.882	0.9389	1
	7		8		9		10		11		12	
Alfa	E^L	E^U	E^L	E^U	E^L	E^U	E^L	E^U	E^L	E^U	E^L	E^U
0	1	1	0.795	0.8046	0.895	0.9900	1	1	1	1	1	1
0.1	1	1	0.796	0.8040	0.895	0.9899	1	1	1	1	1	1
0.2	1	1	0.796	0.8033	0.895	0.9899	1	1	1	1	1	1
0.3	1	1	0.796	0.7958	0.895	0.9897	1	1	1	1	1	1
0.4	1	1	0.796	0.8021	0.895	0.9897	1	1	1	1	1	1
0.5	1	1	0.796	0.8015	0.895	0.9897	1	1	1	1	1	1
0.6	1	1	0.797	0.8008	0.895	0.9896	1	1	1	1	1	1
0.7	1	1	0.797	0.8002	0.895	0.9895	1	1	1	1	1	1
0.8	1	1	0.798	0.7998	0.896	0.9895	1	1	1	1	1	1
0.9	1	1	0.798	0.7993	0.896	0.9894	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0.799	0.7988	0.896	0.9893	1	1	1	1	1	1

Cuadro 3. Índice de eficiencia obtenido para cada DMU

I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_{12}
1	1	0.491	1	0.4286	0.707	1	0.265	0.9462	1	1	1

decisiones con respecto a la interrelación existente de las Entradas y Salidas, de manera de proponer alternativas de mejoras que permita que cada DMU obtenga la máxima eficiencia.

Por lo tanto, el orden de las unidades productivas no eficientes, es el siguiente:

$$E_9 > E_6 > E_3 > E_5 > E_8$$

Determinando así, que la DMU 9 es la más apta para optimizarla mediante acciones de mejoras, luego de que esta alcance la máxima eficiencia, se continúa evaluando las siguientes DMU no eficientes siguiendo el orden establecido mediante el índice de Chen-Klein.

Es posible considerar que si la eficiencia relativa es baja, entonces la DMU es más sensible a variaciones en las entradas y salidas y los posibles cambios en entradas y salidas van a permitir mejorar la eficiencia. Los resultados de un modelo DEA obtenidos a través de técnicas borrosas resultan útiles para usos posteriores (esencialmente la ordenación de las unidades productivas en función de sus ratios de eficiencia). La razón fundamental es que cuando se plantea una ordenación de las DMU, si los datos se consideran conjuntos borrosos lógicamente los ratios son conjuntos borrosos. Esto significa que al afirmar que una DMU es eficiente en sentido borroso, no sólo se está dando un número real en el intervalo $[0, 1]$ sino que además muestra información valiosa acerca del grado de verdad de la afirmación “esta DMU es eficiente” [41].

La optimización del método, a través del sistema GAMS, con un coste computacional de aproximadamente 0.06 segundos para la optimización de los modelos pesimista y optimista, permite la simulación en tiempo real de varios escenarios de pruebas, con diferentes valores del parámetro α .

El método utilizado determina la identificación de las DMU más sensibles al efecto de la incertidumbre, la evaluación del impacto de la eficiencia de las DMU, representa una herramienta valiosa para los decisores puesto que el análisis de escenarios es más fiable, sin la incorporación de una gran complejidad computacional y sin tener que estar dotado de un avanzado conocimiento sobre estadística matemática, como se requiere en el caso de los modelos que adoptan el DEA estocástico [43].

4. CONCLUSIONES

El objetivo de la investigación fue obtener un método que considera la incertidumbre y la imprecisión, y optimiza la selección de alternativas. Es por ello que el método propuesto, basado en la lógica borrosa empleando α -cortes transforma el modelo DEA borroso en una serie de modelos convencionales que pueden ser resueltos mediante la programación lineal usando en su resolución programas informáticos.

El método propuesto es una contribución para la toma de decisiones, ya que permite seleccionar la mejor unidad de decisión y a su vez ordenar las restantes en función de su índice de eficiencia y ofrece una perspectiva de la valoración y clasificación de las unidades de decisión bajo incertidumbre utilizando el modelo DEA borroso. Algunos métodos abordan el proceso de decisión como un modelo matemático determinista, requiriendo conocer con precisión las variables de entrada y salida y otros requieren de un valor fijo de las entradas tal como el modelo propuesto por Cooper et al. el cual evalúa la capacidad de atención a los pacientes en centros hospitalarios, no obstante en la práctica, la toma de decisiones involucra juicios, preferencias del decisor que tienen un grado de incertidumbre respecto a las alternativas, por lo que la decisión puede presentar vaguedad inherente a la descripción del significado semántico de ésta, de allí la relevancia del abordaje mediante la incertidumbre borrosa.

El método desarrollado permite a una organización medir la eficiencia de las unidades de decisión, dando a cada unidad un índice objetivo de eficiencia, dentro de un conjunto significativo de unidades, incluso en caso de desacuerdo sobre la importancia relativa de las salidas. Esto permite tomar decisiones para formular mejoras potenciales que conduzcan a las unidades no eficientes a ser eficientes.

Esta investigación considera el ordenamiento de las unidades de decisión de acuerdo a su eficiencia, mediante el índice de Chen-Klein. De esta forma, las respuestas obtenidas a partir de la solución de un modelo borroso son más precisas que los modelos clásicos; por lo que el método desarrollado puede extenderse a una configuración similar.

5. Referencias

- [1] F. Chediak y L. Valencia. Metodología de medición de eficiencia mediante la técnica de análisis envolvente de datos. *Vector*, 5(Enero – Diciembre):70–81, 2008.
- [2] H. Gutiérrez. *Calidad y Productividad*, volume Cuarta Edición. McGraw Hill, 2014.
- [3] G. Barrios. La medición de la eficiencia técnica mediante el análisis envolvente de datos. <http://www.eumed.net/ce/2007c/gybc-a.htm>, 2008.
- [4] A. Charnes, W. Cooper y E. Rhodes. Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2(6):429–444, 1978.
- [5] A. F. Da Silva, R. de Carvalho Miranda y F. A. Silva Marins. Um modelo fuzzy-dea-game para estratégias de produção sob incerteza. *Rev. adm. empres*, 55(1):78–94, 2015.
- [6] R. Bellman y L. Zadeh. Decision-making in a fuzzy environment. *Management Science*, 17 B(4):141–164, 1970.
- [7] L. Canós, E. Casasús, T. Lara, V. Lara y J. C. Pérez. Un algoritmo fuzzy para la selección de personal basado en agregación de competencias. *X Jornadas de ASEPUMA y III Encuentro Internacional*, 2007.
- [8] D. Aigner, C. A. Knox Lovell y P. Schmidt. Formulation and estimation of stochastic frontier production function models. *Journal of Econometrics*, 6(1):21–37, 1977.
- [9] W. Meeusen y J. Van Den Broeck. Efficiency estimation from Cobb-Douglas production functions with composed error. *International Economic Review*, 18(2):435–444, 1977.
- [10] M. Farrell. The measurement of productive efficiency. *Journal of Royal Statistical Society*, 120(3):253–281, 1957.
- [11] R. Banker, A. Charnes y W. Cooper. Some models for estimating technical and scale efficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, 30(9):1078–1092, 1984.
- [12] P. Rotela, E. de Oliveira, A. da Silva, F. Riera, V. de Mello y L. A. de Carvalho. Data envelopment Analysis and Fuzzy Theory: Efficiency Evaluation under uncertainty in portfolio optimization. *Wseas Transactions on Business and Economics*, 12(4):74–8, 2015.
- [13] S. Medina y O. Manco. Diseño de un sistema experto difuso: evaluación de riesgo crediticio en firmas comisionistas de bolsa para el otorgamiento de recursos financieros. *Estudios Gerenciales*, 23(104):101–129, 2007.
- [14] F. Castiblanco. La incertidumbre y la subjetividad en la toma de decisiones: una revisión desde la lógica difusa. *Revista latinoamericana de pensamiento, teoría e investigación contable. LÚMINA*, 14:116–140, 2013.
- [15] R. Pascual. Técnicas de análisis económico aplicado ii. bloque iii (curso 2011-2012). GITETUR. Grupo para la Investigación Tecnológica en Economía en Turismo. <http://hdl.handle.net/10045/19658>, 2011.
- [16] C. Kao y S. T. Liu. Fuzzy efficiency measures in Data Envelopment Analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 103(3):427–437, 2000.
- [17] P. Guo y Tanaka H. Fuzzy DEA: A perceptual evaluation method. *Fuzzy Sets and Systems*, 119(1):149–160, 2001.
- [18] O. B. Olesen y N. C. Petersen. Chance Constrained Efficiency Evaluation. *Management Science*, 41(3):442–457, 1995.
- [19] M. Pla Ferrando. Modelos flexibles para la valoración de la eficiencia. *Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Valencia. España*, 2013.
- [20] A. Hatami-Marbini, A. Emrouznejad y M. Tavana. A Taxonomy and Review of the fuzzy data Envelopment Analysis Literature, Two Decades in the Making. *European Journal of Operational Research*, 21(3):475–472, 2011.
- [21] M. A. Tubón Amán. Lógica borrosa y análisis de las Finanzas en el Sector Cooperativo. *Proyecto de investigación, previo a la obtención del Título de Ingeniera en Contabilidad y Auditoría. Universidad Técnica de Ambato, Facultad de Contabilidad y Auditoría*, 2016.
- [22] C. Kahraman y E. Tolga. Data envelopment analysis using Fuzzy concept. In *Proceedings of the The 28th International Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL '98)*, pages 338–343, 1998.
- [23] J. K. Sengupta. A Fuzzy systems approach in data envelopment analysis. *Comput. Math. Applic*, 24(8-9):259–266, 2011.
- [24] K. Triantis y O. Girod. A mathematical programming approach for measuring technical efficiency in a fuzzy environment. *J. Prod. Anal*, 10(1):85–102, 1998.
- [25] S. Lertworasirikul, S. Fang, J. Joines y H. Nuttle. Fuzzy data envelopment analysis (DEA): a possibility approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 139(2):379–394, 2003.
- [26] A. Hatami-Marbini S. Saati y A. Makui. Ideal and anti-ideal decision making units: a Fuzzy DEA approach. *Journal of Industrial Engineering International*, 5(10):31–41, 2010.
- [27] F. S Bittencourt de Lemos, A. Fiorese, O. C. Alves Junior y R. G. Vieira. Using Data Envelopment Analysis and Fuzzy Logic as Intelligent Risk-Based Decision Making Support for Virtual Organizations. *Journal of Industrial Engineering International: In C. Kahraman and S. Cevik Onar (eds.): Intelligent Techniques in Engineering Management. Theory and Applications. Springer International Publishing Switzerland*, 2015.
- [28] S. Bray, L. Caggiani y M. Ottomanelli. Measuring transport systems efficiency under uncertainty by fuzzy sets theory based Data Envelopment Analysis: theoretical and practical comparison with traditional DEA model. *Transportation Research Procedia*, 5:186–200, 2015.
- [29] R. P. Sreedevi, V. Vimala, P. Rameswari y S. Sateesh. An Application of Fuzzy Logic and DEA in Agriculture Sector. *International Journal of Engineering Science*, 6(5):4876– 4878, 2016.
- [30] M. Salari y H. Khamooshi. A better project performance prediction model using fuzzy time series and Data Envelopment Analysis. *Journal of the Operational Research Society*, page 1–14, 2016.
- [31] P. Wanke, C. P. Barros y O. R. Nwaogbe. Assessing productive efficiency in nigerian airports using fuzzy-dea. *Transport Policy*, 49:9–19, 2016.
- [32] A. Esmaeili y M. Sadegh Horri. Efficiency evaluation of customer satisfaction index in e-banking using the fuzzy data envelopment analysis. *Management Science Letters*, 4(1):71–86, 2014.
- [33] M. Sadiq y S. K. Jain. Applying fuzzy preference relation for requirements prioritization in goal oriented requirements elicitation process. *International Journal of System Assurance Engineering y Managemen*, 5(4):711–723, 2014.
- [34] B. Aouni, J. M. Martel y A. Hassain. Fuzzy goal programming model: an overview of the current state-of-the-art. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 16(5-6):149–161, 2009.
- [35] A. Kaufmann. Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets. Vol. 1. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetic*, 7(6):495–496, 1977.
- [36] C. Kao, C. C. Liy S. P. Chen. Parametric programming to the analysis of fuzzy queues. *Fuzzy Sets and Systems*, 107(1):93–10, 1999.
- [37] R. A. Yager. Characterization of the extension principle. *Fuzzy Sets and Systems*, 18(3):205–217, 1986.
- [38] L. A. Zadeh. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Trans. Systems Man Cybernet*, 3(1):28–44, 1973.
- [39] H. J. Zimmermann. Fuzzy Set Theory and its Applications. Second edition. *Kluwer-Nijho Publisher*, 1991.
- [40] C. Chen y C. Klein. An efficient approach to solving fuzzy MADM problems. *Fuzzy Sets and Systems*, 88(1):51–67, 1997.

- [41] T. León, V. Liern, J. L. Ruíz y I. Sirvent. A Possibilistic Programming Approach to the Assessment of Efficiency with DEA Models. *Fuzzy Sets and Systems*, 139(2):407–419, 2003.
- [42] W. Cooper, S. Lawrence y K. Tone. *Data envelopment analysis: A comprehensive text with models, applications, references and DEA-solver software*. Springer Science y Business Media, 2007.
- [43] T Sueyoshi. tochastic dea for restructure strategy: an application to a japanese petroleum company. *The International Journal of Management Science*, 28(4):385–398, 2000.