

FUNCIÓN DE LUMINOSIDAD DE CUÁSARES: UN ENFOQUE BASADO EN PROCESOS PUNTUALES

* Rafael González De Gouveia ** Abelardo Monsalve Cobis
*** Katherine Vieira Villarreal

Recibido: 17/07/2015 Aprobado: 22/02/2016

Resumen

La función de luminosidad de cuásares mide el número de cuásares que existen por megaparsec cúbico por unidad de magnitud absoluta. Es una de las herramientas más importantes para estudiar la población de galaxias de núcleo activo y su evolución a lo largo del tiempo. Nuestra investigación pretende estimar esta función bajo un enfoque probabilístico. Mediante un proceso de Poisson no homogéneo bidimensional modelamos la intensidad de cuásares observados en un espacio de magnitud absoluta por corrimiento al rojo. Se desarrollan una serie de modelos flexibles para la función de luminosidad que son estimados por el método de máxima verosimilitud y seleccionados mediante el criterio de información bayesiano (BIC). Un análisis de residuos es efectuado con el objetivo de estudiar la bondad del ajuste del mejor modelo, del cual a su vez se obtiene la función de luminosidad buscada.

Palabras clave: Procesos puntuales, galaxias de núcleo activo, procesos de Poisson no homogéneos.

* *Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Barquisimeto, Venezuela, Licenciado en Matemáticas, rafamateven@gmail.com*

** *Departamento de Investigación de Operaciones y Estadísticas, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Barquisimeto, Venezuela, Doctor en Estadísticas e Investigación de Operaciones, amonsalve@ucla.edu.ve*

*** *Centro de Investigaciones de Astronomía (CIDA), Mérida, Venezuela, PhD en Astronomía, kvieira@cida.gob.ve*

QUASAR LUMINOSITY FUNCTION: A POINT PROCESSES APPROACH

Abstract

The quasar luminosity function measures the number of quasars per cubic megaparsec and absolute magnitude. It is one of the most important tools for studying the active galactic nucleus population and how they have evolved in time. Our investigation estimates this function through a probabilistic approach. We model the observed density of quasars using a bidimensional non-homogeneous Poisson process in the space of absolute magnitude times redshift. A series of adjustable parametrized models are tested and we use maximum likelihood and the Bayesian Information Criteria (BIC) to select the best model, from which the corresponding quasar luminosity function is obtained. Finally a residual analysis is made to study the goodness of fit.

Keywords: Point process, active galactic nucleus, non-homogeneous Poisson process.

INTRODUCCIÓN

Los cuásares son objetos celestes que se caracterizan principalmente por estar muy alejados de la Tierra y tener magnitudes absolutas muy altas, siendo los objetos más luminosos conocidos por la humanidad. En el año 1960, un grupo de científicos identificó lo que parecía una estrella azul débil en la ubicación de la fuente de radio 3C 48 y al obtener su espectro notaron que este poseía líneas de emisión desconocidas lo que era bastante inusual. El misterio permaneció hasta que en 1962, se descubrió un objeto similar identificado con la fuente de radio 3C 273. Poco tiempo después los astrónomos se dieron cuenta que las fuertes líneas de emisión eran simplemente líneas espectrales conocidas pero corridas al rojo por una cantidad desconocida hasta el momento. 3C 48 presentó un corrimiento al rojo igual a 0,37, y 3C 273 mostró sólo 0,16. Este alto corrimiento al rojo indica que estos objetos se alejan de la Tierra a una gran velocidad, por lo que ninguno de estos objetos puede pertenecer a la Vía Láctea. Aplicando la ley de Hubble obtenemos distancias de 1540 Mpc para 3C 48 y alrededor de 700 Mpc para 3C 273. Aunque su aspecto en el cielo era puntual como el de una estrella, dada su lejanía y lumino-

sidad, estos objetos no podían ser estrellas, así que se denominaron **Quasi Stelar Object** o QSO. Posteriores observaciones revelaron que algunos QSOs eran poderosas fuentes de radio y en dichos casos se utilizó el nombre cuasar o cuasar, por **Quasi Stelar Radio Source**. Todas las ideas y conceptos de astronomía pueden consultarse en Freedman y Kaufmann (2007).

La importancia de estudiar los cuásares está en que al estar tan alejados de la Tierra proporcionan información relevante acerca de la evolución en la cantidad de energía y materia en el Universo temprano. El objeto principal con el que se trabaja es la **Función de Luminosidad de Cuásares (FLC)**, esta función mide el número de Cuásares que existen por megaparsec cúbico por unidad de magnitud absoluta (Hugeback, 2007). Mientras tengamos mayor cantidad de cuásares acumulados en un punto, significa que tenemos mayor cantidad de energía en dicho punto, esto es una pieza clave para entender el comportamiento de la energía en el Universo (Yu y Tremaine, 2002).

El objetivo de este artículo es estimar la FLC a través de procesos puntuales de Poisson donde se propone un modelo probabilístico para dicha estimación. Utilizando observaciones de cuásares proporcionadas por el Sloan Digital Sky Survey (York y cols., 2000). Se estima la densidad observada de cuásares como un proceso de Poisson en dos dimensiones, el espacio de magnitud absoluta M y el corrimiento al rojo z . Se siguen principalmente las ideas de Hugeback (2007) para proponer un modelo de Poisson y las ideas de Richards y cols. (2006) para la parte astronómica.

En la sección de desarrollo se explica la naturaleza de los datos y las transformaciones que debemos hacerles antes de trabajarlos. Se muestra un resumen de los aspectos astronómicos relevantes como la cosmología, las correcciones por extinción estelar y las probabilidades observacionales que serán incorporadas al modelo. Se presenta la noción de probabilidades observacionales. Posteriormente se encuentran los conceptos básicos necesarios para abordar el tema. Seguidamente se proponen dos modelos basados en los procesos puntuales de Poisson. En el primero se divide el espacio en una retícula. Suponemos

homogeneidad para cada subespacio de la retícula, a este modelo lo llamamos modelo de referencia. El segundo modelo que se propone no supone homogeneidad, lo llamaremos modelo flexible. A continuación se presentan las estimaciones de ambos modelos y un estudio de los resultados mostrando gráficamente el número esperado de cuásares bajo nuestro modelo y el número de cuásares presentes en la muestra, para culminar esta sección se hace un análisis de los residuos de desviación junto con las fallas observadas en los mismos. Finalmente se presentan las conclusiones.

DESARROLLO

Datos utilizados

Para nuestra investigación se utilizaron los datos del Sloan Digital Sky Survey (SDSS, Data Release III), que consisten en una muestra de 15343 cuásares seleccionados a través de una serie de algoritmos que minimizan la contaminación por fuentes galácticas o extragalácticas (Richards y cols., 2002). Estas observaciones incluyen la posición del cuásar en el cielo, y lo que es de interés para nuestro estudio, la magnitud absoluta y el corrimiento al rojo de cada uno de estos cuásares (York y cols., 2000). Los datos están disponibles de manera gratuita en la página oficial del proyecto SDSS.

En la figura 1 puede apreciarse la distribución de los datos en dos variables observadas de los mismos, estos datos no están repartidos de manera homogénea, analizando la figura de la izquierda, se aprecia una fuerte concentración entre las magnitudes 18 y 19 con un corrimiento al rojo entre 1 y 2. Para una magnitud aparente mayor $m > 19$ esta concentración desaparece y deja un gran recuadro en blanco. Este comportamiento es debido a un cambio de filtro en el método en que los cuásares son encontrados. También es notable un leve vacío para corrimientos al rojo de $z = 2,75$ y $z = 3,5$ aproximadamente, que se debe a que el color de los cuásares en estas zonas hace que el algoritmo de selección los confunda con estrellas y por lo tanto no los tome en cuenta, consideración que se estudia en la siguiente sección.

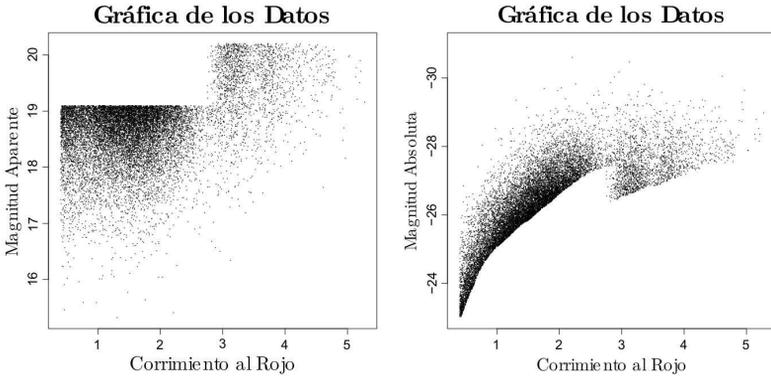


Figura 1: Izquierda, magnitud aparente versus corrimiento al rojo. Derecha, magnitud absoluta versus corrimiento al rojo.

Aspectos astronómicos

Trabajaremos con una cosmología Λ_{cdm} con $\Omega_m = 0,3$; $\Omega_\Lambda = 0,7$; $H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc}$, además el módulo de distancia esta dado por $M = m - 5 \log(D_L) - 25 - K(z)$ donde D_L es la distancia luminosa y $K(z)$ es la K-corrección. Una gráfica para el módulo de distancia puede verse en la figura 2, calculada a partir de (Hogg, 1999). Por otro lado (Hogg, Baldry, Blanton, y Eisenstein, 2002) presenta una descripción detallada de la función de K-corrección, su gráfica puede verse en la figura 2, que debe ser incluida para cuantificar el efecto del estiramiento que sufren los espectros por el corrimiento al rojo cosmológico en la luminosidad observada del objeto.

Por último, calculamos la densidad de cuásares por unidad de volumen físico a partir del corrimiento al rojo z , siguiendo a (Hogg, 1999) para calcular $dV/(dzd\Omega)$, ilustrado en el panel derecho de la figura 2. Esta función que llamaremos $\gamma(z)$ se calcula a partir del diferencial de volumen, según la transformación

$$dV = \frac{c}{H_0} \frac{D_L^2 dz d\Omega}{(1+z)^2 \sqrt{\sum_i \Omega_{i0} (1+z)^{3(1+\omega_i)}}} = \gamma(z) dz \quad (1)$$

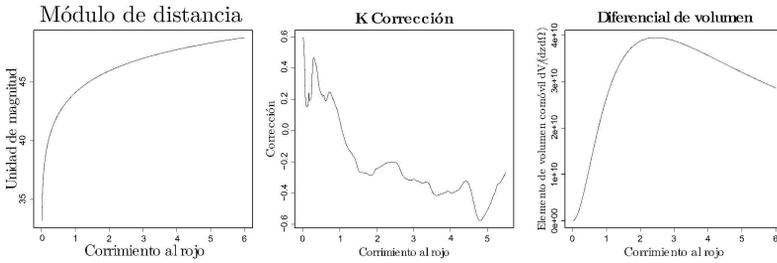


Figura 2: De izquierda a derecha: Módulo de distancia, K-corrección, diferencial de volumen.

donde en (1) c es la velocidad de la luz en el vacío y D_L es la distancia luminosa. Suponiendo un universo plano, podemos escribir a D_L como en (2)

$$D_L = \frac{(1+z)c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\sum_i \Omega_{i0} (1+z)^{3(1+\omega_i)}}} \quad (2)$$

Probabilidades observacionales

No todos los cuásares pueden ser detectados en un catálogo, muchos serán confundidos con estrellas por su color y por lo tanto el algoritmo de selección no los tomará en cuenta. Es por esto que necesitamos saber la probabilidad de que un cuásar sea escogido en nuestra muestra. Esta probabilidad depende del corrimiento al rojo del cuásar, que afecta su color, y de la magnitud absoluta, que afecta su brillo aparente según su distancia. Denotaremos esta probabilidad observacional como $\psi(z, M)$. Luego si $\psi(z, M) = 1$ indica que esperamos detectar en el SDSS todos los cuásares que estén a un corrimiento al rojo z y una magnitud absoluta M . Estas probabilidades están dadas por Richards y cols. (2006).

En la figura 3 podemos observar una gráfica de estas probabilidades. Para un corrimiento al rojo $z = 2,75$ y $z = 3,5$ la probabilidad de identificar cuásares en nuestra muestra disminuye considerablemente,

lo que concuerda con los datos observados en la figura 1, donde hay un pequeño vacío para estos corrimientos al rojo.

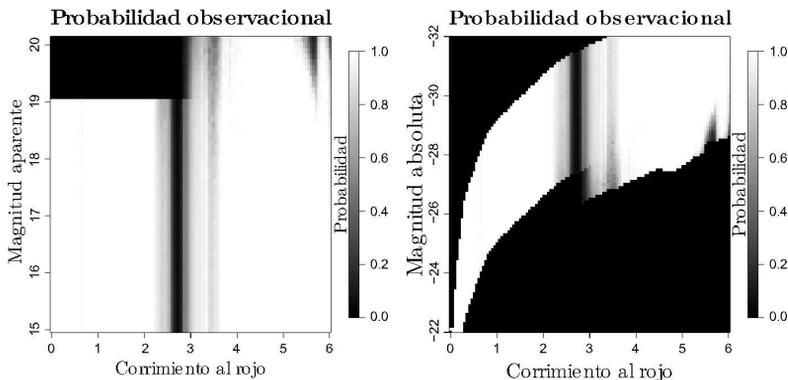


Figura 3: Probabilidades observacionales.

Preliminares matemáticos

Necesitamos algunos conceptos acerca de los procesos estocásticos, en particular las definiciones de procesos de conteo, procesos de espaciales de Poisson, homogéneos y no homogéneos. Los cuales se definen a continuación. La teoría subyacente puede estudiarse a detalle en Ross (2006) y Grimmett y Stirzaker (2001).

Un proceso estocástico $\{N(t), t \geq 0\}$ es llamado **proceso de conteo** si $N(t)$ representa el número total de eventos que ocurren hasta el tiempo t (Ross, 2006).

Proceso de Poisson

El proceso de conteo $\{N(t), t \geq 0\}$ se dice que es un **proceso de Poisson** (Ross, 2006), con tasa constante $\lambda > 0$ o que es homogéneo cuando:

1. $N(0) = 0$.
2. El proceso tiene incrementos independientes.
3. El número de eventos en cualquier intervalo de la forma $(s, s+t)$ tiene una función de distribución de Poisson con tasa λt . Esto es, para todo $s, t \geq 0$

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad , \quad n = 0, 1, \dots$$

El punto 3 de esta definición implica que el proceso de Poisson tiene incrementos estacionarios y que $E(N(t)) = \lambda t$.

Proceso espacial de Poisson

El **proceso espacial de Poisson** (Grimmett y Stirzaker, 2001) o **SPP** (por sus siglas en inglés, *Spatial Poisson Process*) es una generalización multidimensional del proceso de Poisson visto en la sección anterior, el cual fue descrito como un proceso de conteo donde el número de puntos en intervalos disjuntos es independiente y siguen una distribución de Poisson. De manera similar, puede pensarse en puntos dispersados de forma aleatoria sobre un espacio d -dimensional y al Proceso Espacial de Poisson como un proceso de conteo del número de puntos en dicho espacio. Este proceso también es llamado **Proceso Puntual de Poisson** o **PPP**.

Proceso espacial de Poisson homogéneo

El conjunto aleatorio numerable Π de \mathbb{R}^d es llamado **proceso espacial de Poisson homogéneo** (Grimmett y Stirzaker, 2001), con intensidad constante λ , si para todo $A \in \mathcal{B}^d$, la variable aleatoria $N(A)$ satisface:

1. $N(A)$ tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda|A|$, i.e., la probabilidad de obtener n eventos en la región A esta dada por

$$P\{N(A) = n\} = e^{-\lambda|A|} \frac{(\lambda|A|)^n}{n!} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

2. Si A_1, A_2, \dots, A_n son conjuntos disjuntos de \mathcal{B}^d , entonces $N(A_1), N(A_2), \dots, N(A_n)$ son variables aleatorias independientes.

La definición anterior utiliza como medida de referencia la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^d , en el sentido de que el volumen de A es su volumen euclidiano, se puede tener una definición del proceso de Poisson con otras medidas, además de la de Lebesgue.

Cuando se añade la posibilidad de que la función de intensidad no sea constante, estos procesos son llamados no homogéneos. En este caso, se reemplaza el elemento euclidiano $\lambda \, d\mathbf{x}$ con el elemento $\lambda(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ y $\Lambda(A)$ viene dado por

$$\Lambda(A) = \int_A \lambda(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad A \in \mathcal{B}^d.$$

Proceso espacial de Poisson no homogéneo

Sean $d \geq 1$ y $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible no negativa tal que $\Lambda(A) < \infty$ para todo conjunto A acotado. El subconjunto aleatorio numerable \mathbb{X} de \mathbb{R}^d es llamado **proceso espacial de Poisson no homogéneo** (Grimmett y Stirzaker, 2001), con función de intensidad λ , si para todo $A \in \mathcal{B}^d$, la variable aleatoria $N(A)$ satisface:

1. $N(A)$ tiene una distribución de Poisson con parámetro $\Lambda(A)$.
2. Si A_1, A_2, \dots, A_n son conjuntos disjuntos de \mathcal{B}^d , entonces $N(A_1), N(A_2), \dots, N(A_n)$ son variables aleatorias independientes.

La función $\Lambda(A)$, $A \in \mathcal{B}^d$ es llamada la medida media del proceso \mathbb{X} .

Modelos

Se modela la densidad observada de cuásares como un proceso de Poisson en el espacio de magnitud absoluta M y corrimiento al rojo z con intensidad no-homogénea $\lambda(M, z)$ medida en cantidad de cuásares observados por Mpc^3 por unidades de magnitud (Hugeback, 2007).

Sea $\Phi(M, z; \theta)$ una forma funcional genérica para describir la función de luminosidad de cuásares idealizada con un modelo parametrizado por θ , esta función indica el número de cuásares que existen por unidad de volumen y unidad de magnitud absoluta en el universo. Sea $\psi_M(M, z)$ la probabilidad de observar e identificar un cuásar con magnitud absoluta M a un corrimiento al rojo z , donde el subíndice M es usado para indicar que esta es la función transformada que toma magnitudes absolutas como su primer argumento en lugar de la magnitud aparente. Si asumimos que ψ es conocida, el modelo resultante para la cantidad de cuásares observados es un proceso de Poisson con intensidad

$$\lambda_\theta(M, z) = \Phi_\theta(M, z)\psi_M(M, z).$$

Sea $\Lambda = \int_R \lambda(s)ds$ la integral del proceso de Poisson con tasa $\lambda(s)$ sobre la región de soporte R . Sea X la muestra observada de cuásares de tamaño n . La verosimilitud está dada por:

$$L(\theta) = \frac{e^{-\Lambda}}{n!} \prod_{i=1}^n \lambda(w_i),$$

con log-verosimilitud,

$$l(\theta) = - \int_R \lambda(s)ds + \sum_{i=1}^n \ln(\lambda(w_i)) - \ln(n!). \quad (3)$$

Modelo homogéneo

A modo de entender un poco mejor los datos, se supondrá que los cuásares siguen un proceso de Poisson con tasa constante sobre cada cuadro de la rejilla S , y que la intensidad en cada cuadro de la rejilla es independiente de todos los otros cuadros, esto es,

$$\Phi(M, z) = \mu.$$

Para un cuadro S de la rejilla dado, sea μ la intensidad (constante) de Poisson. Los estimados por máxima verosimilitud para cada cuadro de la rejilla S esta dado por:

$$\hat{\mu} = \frac{n}{\int_z \int_M \psi_M(M, z)\gamma(z) dMdz}. \quad (4)$$

Modelo flexible

Hugeback (2007) propone una parametrización flexible de la forma funcional idealizada de la función de luminosidad de cuásares, con un modelo parametrizado $\theta = (\mu, \alpha, \beta)$ dado por:

$$Phi_{\theta}(M, z) = 10^{\mu + f_1(M; \alpha) + f_2(z; \beta)}$$

Donde,

$$f_1(M; \alpha) = \sum_{i=1}^A \alpha_i \cdot (M - M_0)^i, f_2(z; \beta) = \sum_{j=1}^B \beta_j \cdot \zeta(z)^j, \text{ y} \quad (5)$$

$$\zeta(z) = \log_{10} \left(\frac{1+z}{1+z_0} \right).$$

Note que en esta forma funcional los términos para el corrimiento al rojo y la magnitud absoluta son separables. La expresión $\zeta(z)$ tiene una interpretación científica relacionada con la evolución, la cual es descrita en (Wolf y cols., 2003). Siguiendo el trabajo de Richards y cols. (2006), utilizamos $M_0 = -26$ y $z_0 = 2,45$. La flexibilidad de A y B en los límites de la sumatoria en f_1 y f_2 permiten la introducción de exponentes tan altos como lo permitan los datos.

Resultados

La estimación de los modelos propuestos permite obtener una aproximación de la FLC, esto es, nos permite entender como se comporta la Magnitud Absoluta con respecto al corrimiento al rojo. Valores más elevados de la intensidad indican mayor concentración de cuásares. A continuación se presentan las estimaciones de los dos modelos propuestos.

Modelo homogéneo

La integral en la ecuación (4) es aproximada por integración numérica y un mapa de niveles de los estimados de $\hat{\lambda}$ obtenidos pue-

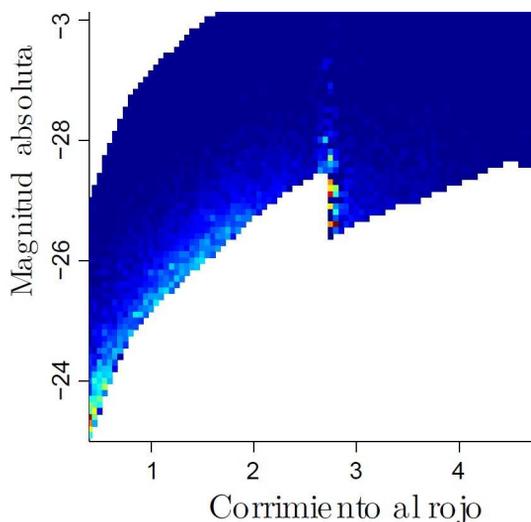


Figura 4: Primer modelo de referencia. Intensidad de Poisson con tasa constante en cada cuadro de la rejilla.

den observarse en la figura 4. La resolución de la rejilla es 0,05 para el corrimiento al rojo, y 0,1 para la magnitud absoluta. Note que, por la variación de tonos en la figura, hay un comportamiento atípico alrededor del corrimiento al rojo $z = 2,75$. Sin embargo estos cambios no son significativos, ya que ocurren debido a una falta de especificación en la función de las probabilidades observacionales en estas regiones, y no por un cambio físico en la cantidad de cuásares.

Modelo flexible

De los 36 modelos ajustados se presentan los 5 primeros modelos ordenados según el BIC de menor a mayor en el cuadro 1.

La función de luminosidad de los cuásares correspondientes al modelo (2, 4) se puede apreciar en la figura 5, los parámetros obtenidos para este modelo son:

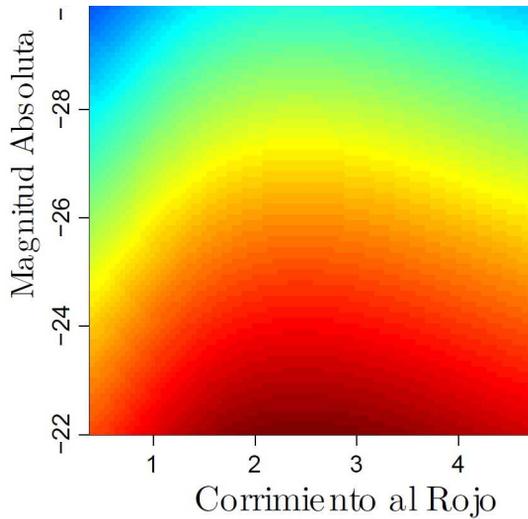


Figura 5: Función de luminosidad de cuásares

$$\hat{\mu} = -6,05 \quad \hat{\alpha} = (0,75, -0,01) \quad \hat{\beta} = (0,0076, -21,27, 2,51, 61,021)$$

Se pueden hacer algunas conclusiones a partir de la figura 5. Para corrimientos al rojo entre 2 y 3, la gráfica muestra mayor intensidad que para otros corrimientos al rojo, esto indica que en esta etapa el universo poseía un mayor número de cuásares brillantes. Esto sugiere que en el universo temprano ($z > 6$) los cuásares eran menos numerosos y menos brillantes, luego dado el combustible existente en el universo su población comenzó a aumentar en número y luminosidad hasta alcanzar su máximo un corrimiento al rojo entre 2 y 3. De $z = 2$ hacia el presente ($0 < z < 2$) la cantidad de cuásares empieza a disminuir considerablemente.

Cuadro 1: Modelos seleccionados

A	B	$l(x)$	BIC
2	4	-250 738.22	501 543.67
2	6	-250 729.25	501 544.93
2	5	-250 734.53	501 545.88
3	6	-250 725.38	501 546.79
3	5	-250 730.76	501 547.95

Valor esperado vs. observado

Podemos calcular el número esperado de cuásares observados para una rejilla a lo largo del espacio de magnitud absoluta y corrimiento al rojo, y compararlo con el número de datos obtenidos para esta rejilla. Esta comparación se realiza en la figura 6. Puede observarse de la figura 6 la similitud entre el número de datos esperados por el modelo obtenido (izquierda), y el número de datos observados (derecha), esto indica que nuestro modelo está calculando correctamente la intensidad de cuásares. Este valor esperado no es más que resolver la integral $\Lambda = \int_r \lambda(s) ds$ para distintas regiones $r = 1, \dots, R$, variando r en la rejilla.

Residuos de desviación

En la figura 7 se muestran los residuos de desviación (Davison y Gigli, 1989) arrojados por el modelo. Los residuos de colores más rojizos tienen signo negativo, esto significa que el modelo está prediciendo menos cuásares de los que han sido observados.

En la figura 7 vemos una línea entre azul y verde que parece bordear por debajo la imagen, este error es atribuido a problemas intrínsecos a la recolección de datos y no una falla sustancial en el modelo, esto es en la estimación de las probabilidades observacionales.

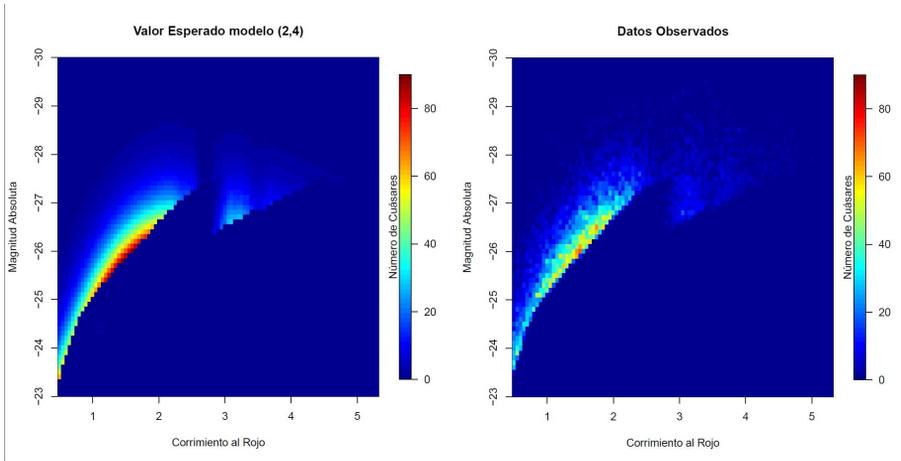


Figura 6: Valores esperados y datos observados.

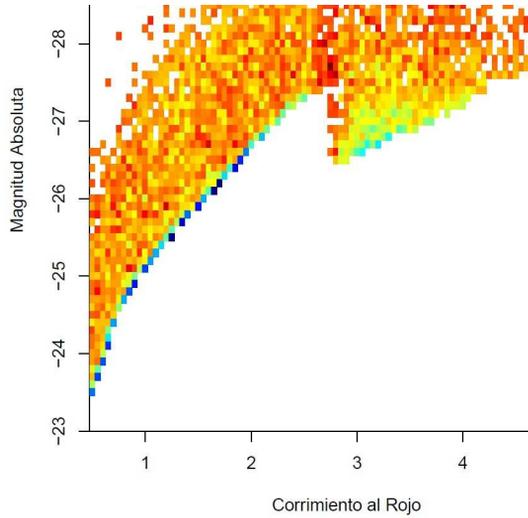


Figura 7: Residuos de desviación para el modelo $(A, B) = (2, 4)$

Conclusiones

Al observar la figura 5 pueden extraerse algunas ideas que son muy valiosas para los astrónomos. Las cuales corroboran las teorías cosmológicas actuales, estas son:

- Colores más claros representan mayor intensidad de cuásares, por lo tanto, más energía. En la figura 5, la zona más clara corresponde a una región con corrimientos al rojo entre 1 y 5. Esto se traduce en que la mayor población de cuásares existió en un tiempo mucho después del inicio del universo, y mucho antes de nuestra época actual.
- El máximo ocurre en corrimientos al rojo de 2. Significa que la mayor actividad luminosa de galaxias no ocurrió en el inicio del Universo. Este punto y el anterior corroboran las teorías de que poco después del Big-Bang no había materia suficiente para crear galaxias tan potentes como los cuásares.
- La actividad luminosa de los cuásares ha disminuido para nuestro tiempo, esto es evidencia que el universo se “enfriá” y poco a poco consume el combustible de material estelar.

Desde el punto de vista estadístico se generó un modelo flexible, es decir, que permite según la evidencia de los datos el modelo decida, a través de BIC, el grado de las potencias de A y B en la función de intensidad, esto permite una estimación que ajuste de acuerdo a la información proporcionada.

Las técnicas para evaluar la bondad de ajuste se basan en el método de los residuos de desviación. Está técnica tiene como ventaja que se puede apreciar de manera gráfica el error cometido y las zonas en donde ocurre. Sin embargo, una desventaja es que no permite cuantificar el error.

En este sentido un buen ajuste está dado por una figura con tonos homogéneos, mientras que si el ajuste no es adecuado se observarían tonos oscuros en varias regiones de la figura. En nuestro caso, la figura 7, sólo tenemos problemas en la parte inferior, y estos residuos

tan altos corresponden a un problema en la obtención de los datos. Este error está relacionado con la capacidad del telescopio, pues es en este borde donde alcanza su límite de observación.

Finalizando podemos decir que se ha construido de manera sistemática un modelo basado en los procesos puntuales de Poisson no homogéneos que proporcionan una estimación acertada de la función de Luminosidad de cuásares, nuestra estimación confirma resultados obtenidos por otros métodos (Richards y cols., 2006). Este proporciona un camino viable para la obtención de funciones de intensidad en casos donde la forma de la intensidad no sea del todo clara pero se tenga una gran cantidad de datos que la describan.

Agradecimientos

Este trabajo es resultado del proyecto 007-RCT-2013 inscrito en el Consejo de Desarrollo Científico Humanístico y Tecnológico de la Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado”.

Referencias

- Davison, A., y Gigli, A. (1989). Deviance residuals and normal scores plots. *Biometrika*, vol. 76, No 2, pp. 211-221.
- Freedman, R., y Kaufmann, W. J. (2007). *Universe* (Octava ed.). W. H. Freeman.
- Grimmett, G., y Stirzaker, D. (2001). *Probability and random processes* (Tercera ed.). Oxford.
- Hogg, D. W. (1999, may). Distance measures in cosmology. *ArXiv Astrophysics e-prints*.
- Hogg, D. W., Baldry, I. K., Blanton, M. R., y Eisenstein, D. J. (2002, oct). The K correction. *ArXiv Astrophysics e-prints*.
- Hugeback, A. (2007). *Point process models for astronomy quasars, coronal mass ejections, and solar flares* (Tesis Doctoral no publicada). University of Chicago.
- Richards, G. T., Fan, X., Newberg, H. J., Strauss, M. A., Berk, D. E. V., Schneider, D. P., ... York, D. G. (2002). Spec-

trosopic target selection in the sloan digital sky survey the quasar sample. *The Astronomical Journal*, vol. 123, No. 6, pp. 2945-2975.

- Richards, G. T., Strauss, M. A., Fan, X., Hall, P. B., Jester, S., Schneider, D. P., ... Snedden, S. A. (2006). The sloan digital sky survey quasar survey: Quasar luminosity function from data release 3. *The Astronomical Journal*, vol. 131, No 6, pp. 2766-2787.
- Ross, S. M. (2006). *Introduction to probability models* (Novena ed.). Academic Press, Inc.
- Wolf, C., Wisotzki, L., Borch, A., Dye, S., Kleinheinrich, M., y Meisenheimer, K. (2003). The evolution of faint AGN between $z \sim 1$ and $z \sim 5$ from the COMBO-17 survey. *Journal of Astronomy & Astrophysics*, vol. 408, pp. 499-514.
- York, D. G., Adelman, J., Anderson, J., John E., Anderson, S. F., Annis, J., Bahcall, N. A., ... Yasuda, N. (2000). The sloan digital sky survey technical summary. *The Astronomical Journal*, vol. 120, No 3. pp. 1579-1587.
- Yu, Q., y Tremaine, S. (2002). Observational constraints on growth of massive black holes. *Royal Astronomical Society*, vol. 335, pp. 965-976.