

# EXPRESIÓN SEMI-ANALÍTICA PARA EL CÁLCULO DE MATRICES DE CONDUCTIVIDAD DE ELEMENTOS FINITOS EN PROBLEMAS DE CONDUCCIÓN DE CALOR

\* Héctor F. Godoy      \*\* Iris J. Lozada  
\*\*\* Juan C. Osorio

Recibido: 17/09/2012    Aprobado: 19/10/2012

## Resumen

La ecuación para la transferencia de calor por conducción no es más que una expresión matemática de la ley de conservación de la energía para un sólido dado. La resolución de la ecuación que modela este problema generalmente es muy difícil o imposible de obtener de forma analítica, por ello es necesario efectuar una aproximación discreta del problema continuo. En este trabajo, se presenta una metodología aplicada a elementos finitos cuadriláteros en problemas de transferencia de calor por conducción, donde las componentes de la matriz de conductividad térmica son obtenidas mediante una expresión semi-analítica y manipulaciones algebraicas sencillas. Esta técnica ha sido utilizada exitosamente en integraciones de matrices de rigidez de elementos finitos bidimensionales y tridimensionales, reportando mejoras sustanciales de tiempos de CPU en comparación con la integración Gaussiana.

**Palabras clave:** Elemento finito, Expresión semi-analítica, Matriz de conductividad.

## A SEMI-ANALYTICAL EXPRESSION FOR CALCULATING FINITE ELEMENT CONDUCTIVITY MATRICES IN HEAT CONDUCTION PROBLEMS

### Abstract

The heat transfer equation by conduction is not more than a mathematical expression of the energy conservation law for a given solid. Solving the equation which model this problem is generally very difficult or impossible in an analytical way, so it is necessary to make a discrete approximation of the continuous problem. In this paper, we present a methodology applied to the quadrilateral finite elements in problems of heat transfer by conduction, where the components of the thermal conductivity matrix are obtained by a semi-analytical expression and simple algebraic manipulations. This technique has been used successfully in stiffness arrays' integrations of bidimensional and tridimensional finite elements, reporting substantial improvements of CPU times compared with the Gaussian integration

**Keywords:** Finite element, semi-analytical expression, thermal conductivity matrix.

---

\* *Decanato de Ciencias y Tecnología, Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", Barquisimeto, Venezuela, hectorfernandogm@hotmail.com*

\*\* *Departamento de Ciencias Básicas, Decanato de Ingeniería de Civil, Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", Barquisimeto, Venezuela, ilozada@ucla.edu.ve*

\*\*\* *Departamento de Ciencias Básicas, Decanato de Ingeniería de Civil, Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", Barquisimeto, Venezuela, jcosorio@ucla.edu.ve*

## Introducción

El fenómeno de la transferencia de calor ha sido estudiado rigurosamente de manera experimental desde el año 1750 por Lomonosov. Este autor estableció las bases físicas fundamentales de la Transferencia de calor. A comienzos del siglo XIX el matemático francés Joseph Fourier se dedicó al estudio de la ecuación de calor, y con la teoría analítica del calor establece las leyes de propagación del mismo [7]. Actualmente la tecnología moderna contempla un conocimiento y análisis de la transferencia de calor, exigiendo un mayor dominio de técnicas sofisticadas como métodos numéricos y de simulación computacional [5]. La transferencia de calor por conducción ha sido un campo fértil para las matemáticas aplicadas en los últimos doscientos años. El Método de Elementos Finitos es uno de los métodos numéricos en el campo de las ciencias aplicadas, actualmente más utilizado para la obtención de soluciones aproximadas a los problemas reales de transferencia de calor por conducción. En este método de análisis, una región compleja que define un continuo se discretiza en forma geométrica simple, llamada elementos finitos. Estos elementos se conectan entre sí mediante un número discreto de puntos, llamados nodos. Las propiedades del material y las relaciones gobernantes, son consideradas sobre cada elemento del mallado. Con estos datos, se calcula de forma aproximada la matriz de conductividad térmica de cada elemento y mediante un proceso de ensamble se obtiene la solución aproximada de la matriz de conductividad del continuo [2] y [1]. En este trabajo se generalizan los resultados presentados por [3], [8], [10] y [12] para ser aplicados en la integración semi-analítica de la matriz de conductividad de un elemento cuadrilátero de cuatro nodos en problemas de transferencia de calor por conducción, hasta donde se tiene conocimiento, no se han encontrado resultados basados en la matemática simbólica.

## Formulación

La transferencia de calor por conducción es el mecanismo mediante el cual fluye calor a través de un sólido. La ecuación para la transferencia de calor por conducción no es más que una expresión matemática de la ley de conservación de la energía para un sólido dado. Para derivar esta ecuación, se realiza un balance de energía en un volumen elemental de materia en el que se transfiere calor, sólo por conducción [5]. El mecanismo de conducción estacionaria de calor sobre dominios bidimensionales  $\Omega$ , con frontera  $\Gamma$  de normal  $\mathbf{n}$ , el cual se subdivide en una parte  $\Gamma_T$  con temperaturas  $T$  prescritas y otra parte  $\Gamma_q$  con flujos normales  $q_n$  prescritos, se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial q_x}{\partial X} - \frac{\partial q_y}{\partial Y} + Q &= 0 \quad , \quad \text{en } \Omega \\ T &= \bar{T} \quad , \quad \text{en } \Gamma_T \\ q_n &= \bar{q}_n \quad , \quad \text{en } \Gamma_q \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $Q$  es el término fuente,  $q_x$  y  $q_y$  son los flujos de calor en las direcciones de  $X$  e  $Y$  expuesto por [6].

En esta investigación se considera que el término fuente es cero y que la temperatura no varía con el tiempo. Así, la ley de Fourier permite cuantificar el proceso de transferencia de calor por conducción y establece que los flujos de calor están dados por:

$$q_x = -k_x \frac{\partial T}{\partial X} \quad y \quad q_y = -k_y \frac{\partial T}{\partial Y} \quad (2)$$

en la cual  $k_x$  y  $k_y$  son los coeficientes de conductividad térmica en  $X$  e  $Y$  respectivamente.

El Método de los Elementos Finitos propone dividir el dominio  $\Omega$ , en subdominios  $\Omega^e$ , en los cuales se conoce el campo de temperatura en cada uno de sus nodos. Los elementos en los cuales se discretiza este dominio en problemas bidimensionales son cuadrilátero de cuatro nodos.

Para el desarrollo que se presenta a continuación, se considera el elemento finito con la configuración de nodos en sentidos anti-horario, ver Figura 1.

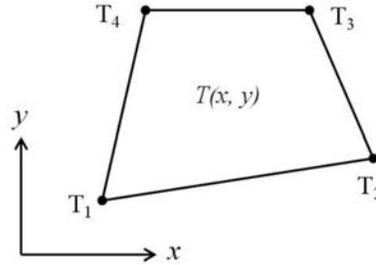


Figura 1: Numeración de nodos.

Sean

$$T = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) T_i \tag{3}$$

$$X = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i \quad ; \quad Y = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i \tag{4}$$

donde  $(x_i, y_i)$  son las coordenadas del nodo  $i$ , y las  $N_i$  son las funciones que interpolan las temperaturas y la geometría del elemento. En este trabajo se consideran las siguientes funciones de interpolación para el elemento cuadrilátero de cuatro nodos.

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) & N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) & N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \tag{5}$$

Las ecuaciones (3) y (4) permiten interpolar el campo de temperatura y la geometría en cada nodo. Mediante la transformación de coordenadas, de la ecuación (1), el elemento es transformado en un elemento cuadrilátero con lados paralelos a los ejes coordenados, como se muestra en la Figura 2.

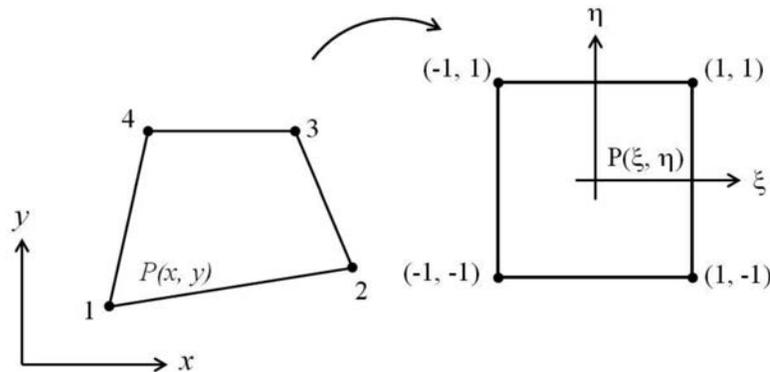


Figura 2: Transformación Isoparamétrica.

Con estas consideraciones y siguiendo la teoría en [13], los elementos de la matriz de conductividad del elemento son calculados al efectuar las siguientes integrales:

$$K^e_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( k_x \frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial N_j}{\partial X} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial N_j}{\partial Y} \right) \det J d\xi d\eta \quad \text{con } i, j \in \{1, \dots, 4\}. \quad (6)$$

La integración de esta matriz dada en la ecuación (6), al igual que la integración de la matriz de rigidez sobre dominios cuadriláteros, generalmente no son fáciles de calcular, debido a que el integrando viene dado como funciones racionales, las cuales resultan extremadamente difícil de resolver. Estas integraciones, usualmente son realizadas utilizando integración numérica. En éstas se emplean grandes cantidades de tiempo de CPU, resultando costosas y complicadas, [13] y [14].

Por ser  $[K^e]$  una matriz simétrica y de orden 4x4, sólo se necesita calcular 10 componentes de esta. Utilizando Integración Numérica (Gauss con 2 puntos de integración) y manipulando simbólicamente estos resultados, con la ayuda del software matemático MAPLE [9], se encuentra una expresión general que representa todos sus elementos y esta dado por:

$$K^e_{ij} = \left[ \frac{3A_3(k_x G_1 + k_y G_2) + f_1(k_x G_3 + k_y G_4)}{3A_3^2 - f_1^2} \right] + \left[ \frac{3A_3(k_x G_5 + k_y G_6) + f_2(k_x G_7 + k_y G_8)}{3A_3^2 - f_2^2} \right] \quad (7)$$

donde  $G_i$  con  $i \in \{1, \dots, 8\}$  son funciones que dependen del término que representan, ver Cuadro 1;

$$f_1 = A_1 + A_2 \quad ; \quad f_2 = A_1 - A_2$$

$$A_1 = \left( \frac{1}{8} \right) (x_{32}y_{41} - x_{41}y_{32}) \quad ; \quad A_2 = \left( \frac{1}{8} \right) (x_{43}y_{21} - x_{21}y_{32}) \quad ; \quad A_3 = \left( \frac{1}{8} \right) (x_{31}y_{42} - x_{42}y_{31})$$

con  $x_{ij} = x_i - x_j$  e  $y_{ij} = y_i - y_j$ .

$G_i$			
<b>i</b>	$k_{11}$	$k_{12}$	$k_{13}$
1	$\left(\frac{1}{24}\right)(y_{42})^2$	$\left(\frac{-1}{48}\right)(y_{42})(y_{31} - y_{41})$	$\left(\frac{-1}{48}\right)(y_{42})^2$
2	$\left(\frac{1}{24}\right)(x_{42})^2$	$\left(\frac{-1}{48}\right)(x_{42})(x_{31} - x_{41})$	$\left(\frac{-1}{48}\right)(x_{42})^2$
3	$\left(\frac{1}{16}\right)(y_{42})^2$	$\left(\frac{-1}{16}\right)(y_{41})(y_{42})$	0
4	$\left(\frac{1}{16}\right)(x_{42})^2$	$\left(\frac{-1}{16}\right)(x_{41})(x_{42})$	0
5	$\left(\frac{1}{24}\right)(-y_2y_{32} - y_3y_{43} + y_4y_{42})$	$\left(\frac{-1}{48}\right)(y_{31})(y_{32} - y_{42})$	$\left(\frac{1}{48}\right)(y_{32}y_{41} - 2y_{24}^2 - y_{21}y_{43})$
6	$\left(\frac{1}{24}\right)(-x_2x_{32} - x_3x_{43} + x_4x_{42})$	$\left(\frac{-1}{48}\right)(x_{31})(x_{32} - x_{42})$	$\left(\frac{1}{48}\right)(x_{32}x_{41} - 2x_{24}^2 - x_{21}x_{43})$
7	$\left(\frac{1}{16}\right)(y_{42})(y_{43} - y_{32})$	$\left(\frac{-1}{16}\right)(y_{31})(y_{32})$	$\left(\frac{-1}{16}\right)(y_{42})(y_{41} - y_{32})$
8	$\left(\frac{1}{16}\right)(x_{42})(x_{43} - x_{32})$	$\left(\frac{-1}{16}\right)(x_{31})(x_{32})$	$\left(\frac{-1}{16}\right)(x_{42})(x_{41} - x_{32})$

Cuadro 1: Funciones generadoras

La matriz de conductividad presenta la siguiente forma:

$$[\mathbf{K}^e] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ & & k_{33} & k_{34} \\ & & & k_{44} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Los elementos de la matriz se organizan en tres grupos, como se indica en el siguiente cuadro:

Grupos	Términos
A	$k_{11}, k_{22}, k_{33}, k_{44}$
B	$k_{12}, k_{23}, k_{34}, k_{14}$
C	$k_{13}, k_{24}$

Cuadro 2: Clasificación de los Términos de la Matriz.

Con esta clasificación, cada grupo queda distribuido en la matriz de conductividad de la siguiente manera:

$$[\mathbf{K}^e] = \begin{bmatrix} A & B & C & B \\ B & A & B & C \\ C & B & A & B \\ B & C & B & A \end{bmatrix} \quad (9)$$

Para generar las componentes de (3.9) se utiliza una transformación de coordenadas ( $\mathbf{R}$ ) (cuadro 3), la cual no modifica la geometría del elemento.

i	Coordenadas del Nodo i	Coordenadas donde es Enviado el Nodo i Mediante la Transformación ( $\mathbf{R}$ )
1	$(x_1, y_1)$	$(x_4, y_4)$
2	$(x_2, y_2)$	$(x_3, y_3)$
3	$(x_3, y_3)$	$(x_2, y_2)$
4	$(x_4, y_4)$	$(x_1, y_1)$

Cuadro 3: Transformación de Coordenadas.

Sea  $P_{i+1}$  un vector donde se almacenan las coordenadas de los nodos al aplicarse  $i$  veces la transformación ( $\mathbf{R}$ ) al elemento finito en estudio, con  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Así,  $P_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$ , al aplicar ( $\mathbf{R}$ ) se obtiene  $P_2 = (x_2, x_3, x_4, x_1, y_2, y_3, y_4, y_1)$ , al aplicar ( $\mathbf{R} \circ \mathbf{R}$ ) se obtiene  $P_3 = (x_3, x_4, x_1, x_2, y_3, y_4, y_1, y_2)$  y finalmente si aplicamos ( $\mathbf{R} \circ \mathbf{R} \circ \mathbf{R}$ ) se tiene  $P_4 = (x_4, x_1, x_2, x_3, y_4, y_1, y_2, y_3)$ .

El término que se utiliza de base para obtener todos los términos del grupo se llamará término generador. A continuación se demuestra la forma como se genera los términos de la matriz de conductividad en cada grupo, utilizando la ecuación (7) y la transformación de coordenadas.

**Grupo A.** (Término generador  $k_{11}$ )

$$k_{11} \xrightarrow{P_2} k_{22} \xrightarrow{P_3} k_{33} \xrightarrow{P_4} k_{44}$$

**Grupo B.** (Término generador  $k_{12}$ )

$$k_{12} \xrightarrow{P_2} k_{23} \xrightarrow{P_3} k_{34} \xrightarrow{P_4} k_{14}$$

**Grupo C.** (Término generador  $k_{13}$ )

$$k_{13} \xrightarrow{P_2} k_{24}$$

## Ejemplo

Para validar la precisión de los resultados obtenidos con esta metodología en comparación a la numérica (Gauss con 2 puntos de integración), se toma el ejemplo planteado en la teoría clásica para conducción de calor en régimen estable, dado en [4].

La pared de un horno industrial se construye con ladrillo de arcilla refractaria de 0,5 m de espesor que tiene una conductividad térmica de  $1,7 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ . Mediciones realizadas durante la operación en estado estable revelan temperaturas de 1400 K y 1150 K en las superficies interna y externa, respectivamente. ¿Cuál es el valor de la temperatura en cualquier punto de esta?.

1. **MODELO:** la Figura 3 muestra el modelo, una pared de material de arcilla con conductividad térmica  $k_{xx} = k_{yy} = 1,7 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ . El modelo fue creado usando el software ABAQUS [11].

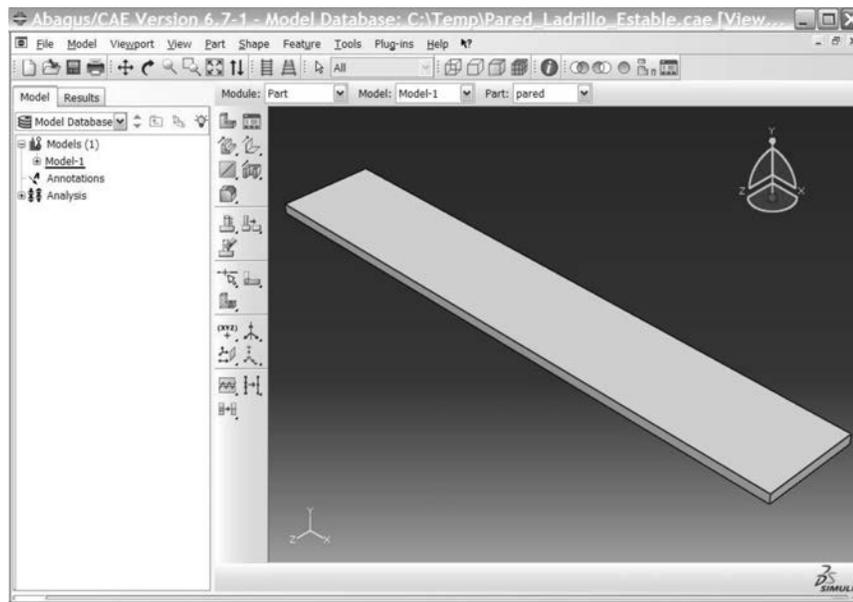


Figura 3: Modelación de la pared.

2. **CONDICIONES DE CONTORNO:** en la Figura 4 se muestra el modelo con las condiciones de contorno establecidas, es decir, las temperaturas en las caras de la pared con  $T=1400\text{ K}$  y  $T=1150\text{ K}$  en las superficies (interna y externa).

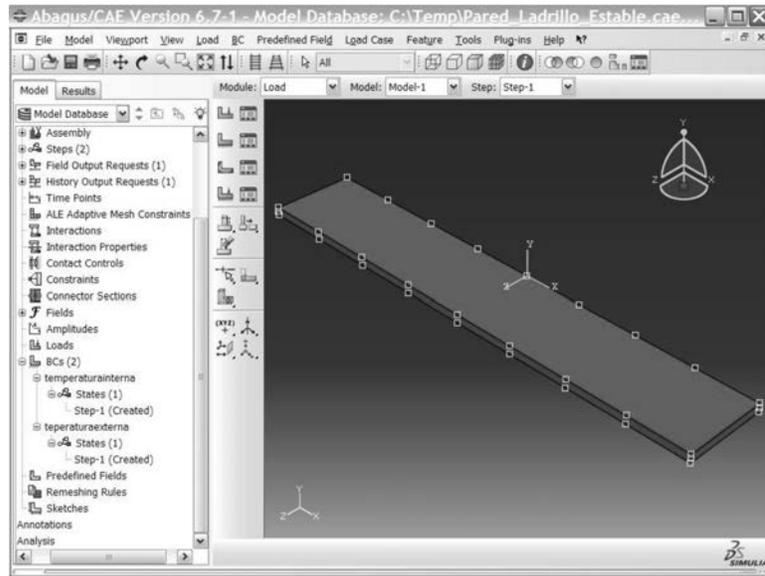


Figura 4: Condiciones de contorno establecidas.

3. **MALLADO DE LA GEOMETRIA:** el modelo fue discretizado en 600 elementos cuadriláteros de 4 nodos.

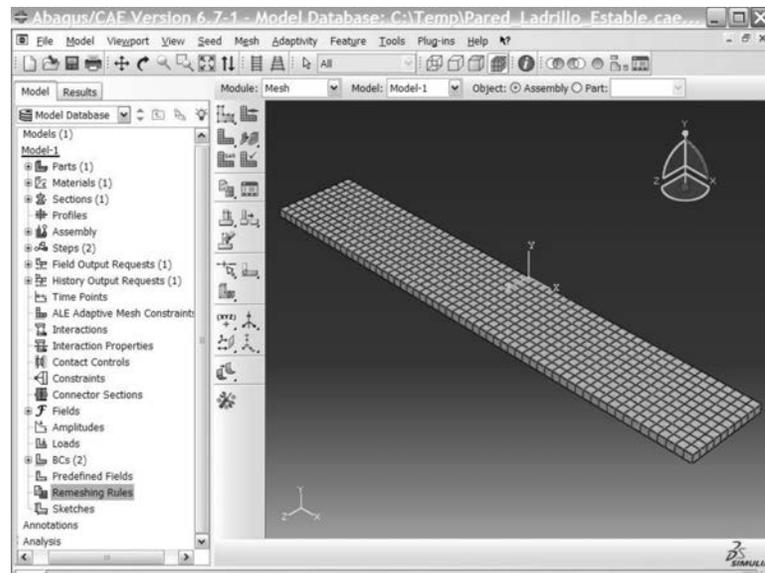


Figura 5: Mallado del modelo.

4. **RESULTADO:** en las Figuras 6 y 7, muestra el flujo de calor a través de la pared y la forma vectorial.

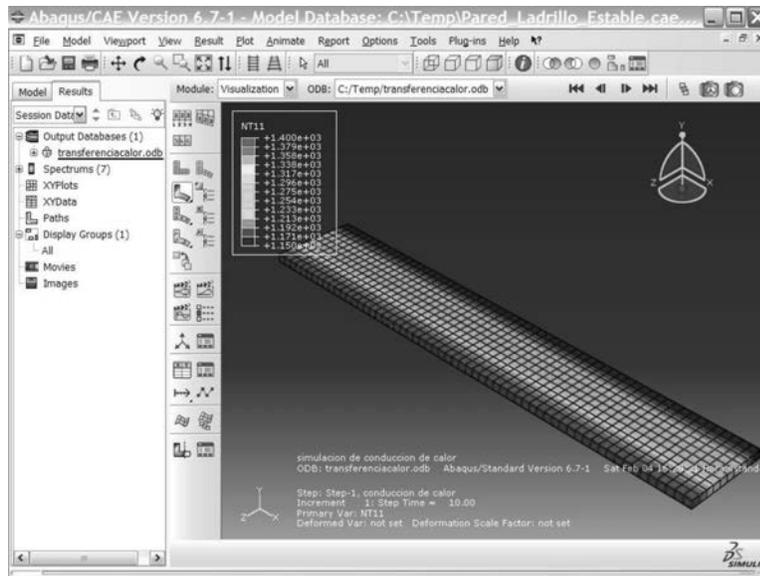


Figura 6: Flujo de calor en la pared.

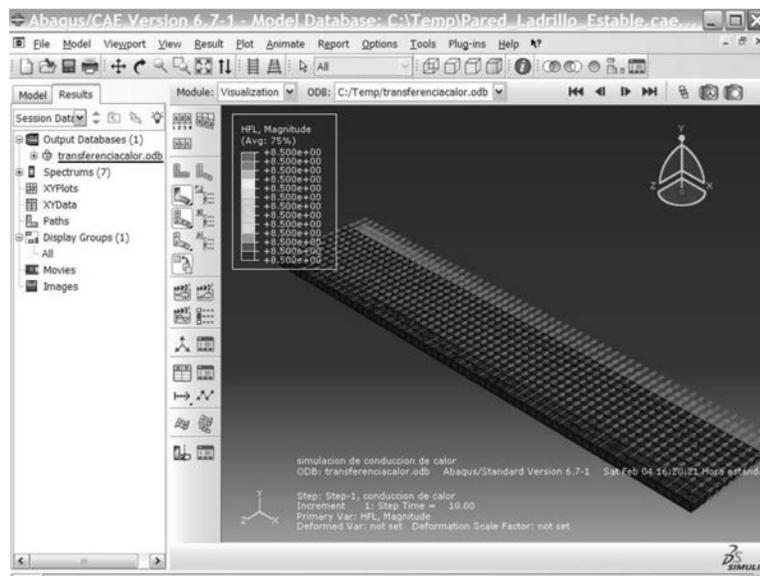


Figura 7: Forma vectorial del flujo.

Para conocer la temperatura en un punto cualquiera se debe resolver el sistema

$$[\mathbf{K}^e][\mathbf{T}^e] = [\mathbf{f}^e] \quad (10)$$

Para cada elemento del mallado los software comerciales que trabajan con el MEF utilizan integración numérica gaussiana para el cálculo de la matriz de conductividad térmica  $[K^e]$ .

Se considera un elemento cualquiera del mallado, donde sus coordenadas nodales se muestran en el Cuadro 4, tomados de la base de datos del programa.

Nodo	1	2	3	4
x	-5	0	0	-5
y	5	5	0	0

Cuadro 4: Coordenadas de los nodos del elemento 100

Para este elemento, la matriz de conductividad por subrutina numérica (Gauss 2 puntos) será:

$$[K^{e=100}] = \begin{bmatrix} -1,333333333 & 0,283333332 & 0,566666664 & 0,283333332 \\ 0,283333332 & -1,333333333 & 0,283333332 & 0,566666664 \\ 0,566666664 & 0,283333332 & -1,333333333 & 0,283333332 \\ 0,283333332 & 0,566666664 & 0,283333332 & -1,333333333 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Y por la subrutina simbólica, se obtiene:

$$[K^{e=100}] = \begin{bmatrix} -1,333333333 & 0,283333332 & 0,566666664 & 0,283333332 \\ 0,283333332 & -1,333333333 & 0,283333332 & 0,566666664 \\ 0,566666664 & 0,283333332 & -1,333333333 & 0,283333332 \\ 0,283333332 & 0,566666664 & 0,283333332 & -1,333333333 \end{bmatrix} \quad (12)$$

De (11) y (12) se evidencia que ambas metodologías tienen la misma precisión. Ambas subrutinas se implementaron utilizando el software MAPLE [9].

### Tiempos de CPU

Para comparar los tiempos de CPU, se utilizó un procesador Intel(R) Pentium(R) Dual CPU T2330 @ 1.60 GHz 1.60 GHz. 1.99 de RAM. En el ejemplo anterior los 600 elementos de la malla con la subrutina numérica (Gauss 2 puntos) se obtuvo un tiempo de 3.968 seg y con la subrutina simbólica se obtuvo un tiempo de 1.062 seg, se evidencia que existe un ahorro del 73.2%. En el siguiente cuadro, se muestra los tiempos de ejecución con un número mayor de elementos.

No de elementos	Integración numérica (seg)	Integración simbólica (seg)	Ahorro(%)
1000	6.281	1.406	77,5
10000	101.2	9.375	90.2
100000	5222,09	88,637	98.3

Cuadro 5: Tiempos de CPU

Como se observa la metodología desarrollada y aplicada a la integración semi-analítica de la matriz de

conductividad de elementos finitos cuadriláteros de cuatro nodos en problemas de transferencia de calor por conducción, permite mejorar la velocidad de cálculo en comparación a la integración numérica.

## Conclusiones

En este trabajo se generalizó la técnica presentada por [3], [8], [10] y [12], para ser aplicada en el cálculo de las componentes de la matriz de conductividad y se logró obtener una expresión semi-analítica, que permite mediante una transformación de coordenadas, calcular las integrales involucradas en el cálculo de las componentes de la matriz de conductividad térmica del elemento cuadrilátero en el problema transferencia de calor por conducción. Esta ecuación, reduce sustancialmente el número de operaciones algebraicas que se realiza con Integración Gaussiana y mantiene su precisión, por lo que los tiempos de cómputos serán más rápidos que los obtenidos por el método numérico.

## Referencias

- [1] CERROLAZA M. (2007) *El método de los elementos finitos para ingeniería y ciencias aplicadas: teoría y programas*. CDCH. (Universidad Central de Venezuela). Caracas.
- [2] CHANDRUPATLA T. & BELEGUNDU A. (2004) *Introducción al estudio del elemento finito en ingeniería. Segunda edición*. Pearson Educación.
- [3] GRIFFITHS D. (1994) *Stiffness matrix of the four-node quadrilateral element in closed form*. Int. J. Numer. Methods Eng. (1027-1038)
- [4] IBAÑEZ J. (2004) *Transferencia de Calor: Laboratorios Multimediales para transmisión de calor por conducción con Pro/Engineer*. Chile.
- [5] INCROPERA F. & DE WITT D. (1996) *Fundamentos de Transferencia de Calor*. Cuarta Edición, Pearson/Prentice-Hall, México.
- [6] JOUGLARD C. (1999) *Integración numérica de elementos finitos cuadriláteros*. Mecánica Computacional. 19(7), (413-422).
- [7] KREITH F. ; BOHN M. (2001) *Principios de Transferencia de Calor*. Thomson. Learning, México.
- [8] LOZADA I., OSORIO J., GRIFFITHS D. & CERROLAZA M. ( 2006) *Stiffness matrix semi-analytical integration of an 8-noded plane elasticity finite-element by using symbolic computation*. Numer Methods Partial Differential, (296-316).
- [9] MAPLE. (2011) *User's Manual*. Versión 15.1 Soft Warehouse. USA.
- [10] OSORIO J., LOZADA I., GRIFFITHS D. & CERROLAZA M. ( 2004) *One equation among terms of stiffness matrix of the 8-noded plane elasticity finite element the degrees of freedom orthogonals of the nodes*. (in press), J. of Finite Elements in Analysis and Design.
- [11] SIMULIA ABAQUS. (2007) *User's Manual*. Versión 6.7 Dassault Systemes. USA.
- [12] VIDELA L., APARICIO N. & CERROLAZA M. (1996 ) *Explic integration of the stiffness matrix of a four-noded-plane elasticity finite element*. Comm. Numer. Methods Eng. (731-743).
- [13] ZIENKIEWICZ O. C. (1982) *El método de los elementos finitos* Reverté, S.A.
- [14] ZIENKIEWICZ O. & CHEUNG Y. (1967) *The finite element method in structural and continuum mechanics* McGraw-Hill book Company. New St. Louis San Francisco Colorado Spring.